Quantentheorie II — Serie 11

Dirac-Kamm, Verschränkung, Matrix-Exponential — 22. 5. 2019

1. Beachte ein Quantensystem aus zwei Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, deren 1-Teilchen-Zustände wir mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezeichnen. Der Singulett-Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\Big)$$

ist das klassische Beispiel eines *verschränkten* Zustandes. Solche Zustände lassen sich nicht in Produktform

$$|\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$$

schreiben. Zeige, dass dies in der Tat unmöglich ist, indem Du den allgemeinen 1-Teilchen-Zustand als

$$|\chi_i\rangle = \alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle$$

ansetzt und zeigst, dass die Produktform für $|S\rangle$ zu einem Widerspruch führt.

2. Wir haben in der Vorlesung als Potential für eine Drahtschleife der Länge $L = aN$ den Dirac-Kamm

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja)$$

gewählt und mithilfe des Blochschen Theorems die 1-Teilchen-Wellenfunktionen konstruiert. In der Vorlesung war $\alpha > 0$ und die Lösungen hatten alle positive Energie $E > 0$. Betrachte nun $\alpha < 0$. In diesem Fall gibt es sowohl Lösungen mit positiver wie auch mit negativer Energie.

(a) Argumentiere, dass die Lösungen mit positiver Energie $E > 0$ genau die gleiche Form wie bei $\alpha > 0$ haben und wiederum die Bedingung

$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\sin(ka)$$

erfüllen, mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $K = \frac{2\pi n}{Na}$, wo n eine ganze Zahl ist.

(b) Zeige, dass die Lösungen mit negativer Energie $E < 0$

$$\cos(Ka) = \cosh(\kappa a) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 \kappa}\sinh(\kappa a) \tag{1}$$

mit $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ erfüllen. Es gibt zwei Arten dieses Resultat zu erhalten. Man kann entweder die ganze Rechnung analog zur Vorlesung nochmal für $E < 0$ durchführen oder argumentieren, dass man das Resultat durch analytische Fortsetzung $E \to -E$, $k \to i\kappa$ aus dem Resultat bei (a) erhalten kann.

(c) Diskutiere die Lösung der Gleichung (1) graphisch.

3. Das Exponential einer Matrix $\hat{A}$ ist definiert durch die Taylor-Reihe

$$e^{\hat{A}} = \hat{1} + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}^3 + \ldots .$$

(a) Sei $\hat{A} = \hat{S}^{-1}\,\hat{B}\,\hat{S}$. Zeige, dass

$$e^{\hat{A}} = \hat{S}^{-1}\,e^{\hat{B}}\,\hat{S}\,.$$

(b) Zeige, dass für eine Diagonalmatrix

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad e^{\hat{B}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

(c) Zusammengenommen ergeben (a) und (b) eine Methode, um $e^{\hat{A}}$ für eine diagonalisierbare Matrix explizit zu berechnen. Berechne damit das Exponential von

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc} 0 & \ln 2 \\ \ln 2 & 0 \end{array} \right) .$$

(d) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\,e^{\hat{A}t} = \hat{A}\,e^{\hat{A}t}\,.$$