

1. Beachte ein Quantensystem aus zwei Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, deren 1-Teilchen-Zustände wir mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezeichnen. Der Singulett-Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

ist das klassische Beispiel eines verschränkten Zustandes. Solche Zustände lassen sich nicht in Produktform

$$|\chi_1\rangle \otimes |\chi_2\rangle$$

schreiben. Zeige, dass dies in der Tat unmöglich ist, indem Du den allgemeinen 1-Teilchen-Zustand als

$$|\chi_i\rangle = \alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle$$

ansetzt und zeigst, dass die Produktform für $|S\rangle$ zu einem Widerspruch führt.

2. Wir haben in der Vorlesung als Potential für eine Drahtschleife der Länge $L = aN$ den Dirac-Kamm

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja)$$

gewählt und mithilfe des Blochschen Theorems die 1-Teilchen-Wellenfunktionen konstruiert. In der Vorlesung war $\alpha > 0$ und die Lösungen hatten alle positive Energie $E > 0$. Betrachte nun $\alpha < 0$. In diesem Fall gibt es sowohl Lösungen mit positiver wie auch mit negativer Energie.

- (a) Argumentiere, dass die Lösungen mit positiver Energie $E > 0$ genau die gleiche Form wie bei $\alpha > 0$ haben und wiederum die Bedingung

$$\cos(Ka) = \cos(ka) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \sin(ka)$$

erfüllen, mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $K = \frac{2\pi n}{Na}$, wo n eine ganze Zahl ist.

- (b) Zeige, dass die Lösungen mit negativer Energie $E < 0$

$$\cos(Ka) = \cosh(\kappa a) + \frac{m\alpha}{\hbar^2 \kappa} \sinh(\kappa a) \quad (1)$$

mit $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$ erfüllen. Es gibt zwei Arten dieses Resultat zu erhalten. Man kann entweder die ganze Rechnung analog zur Vorlesung nochmal für $E < 0$ durchführen oder argumentieren, dass man das Resultat durch analytische Fortsetzung $E \rightarrow -E$, $k \rightarrow i\kappa$ aus dem Resultat bei (a) erhalten kann.

- (c) Diskutiere die Lösung der Gleichung (1) graphisch.

3. Das Exponential einer Matrix \hat{A} ist definiert durch die Taylor-Reihe

$$e^{\hat{A}} = \hat{1} + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}^3 + \dots$$

(a) Sei $\hat{A} = \hat{S}^{-1} \hat{B} \hat{S}$. Zeige, dass

$$e^{\hat{A}} = \hat{S}^{-1} e^{\hat{B}} \hat{S}.$$

(b) Zeige, dass für eine Diagonalmatrix

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \longrightarrow e^{\hat{B}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

(c) Zusammengenommen ergeben (a) und (b) eine Methode, um $e^{\hat{A}}$ für eine diagonalisierbare Matrix explizit zu berechnen. Berechne damit das Exponential von

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \ln 2 \\ \ln 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt} e^{\hat{A}t} = \hat{A} e^{\hat{A}t}.$$