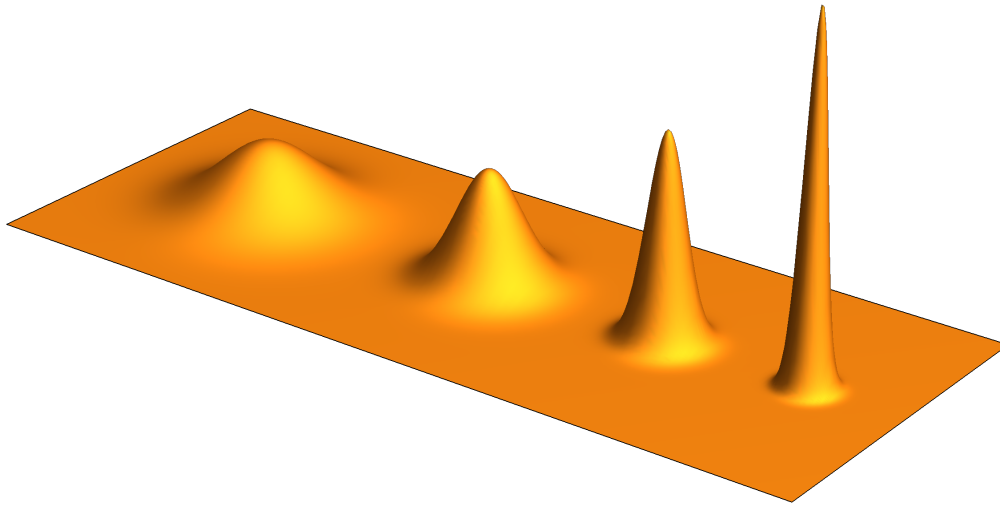


Mathematische Methoden der Physik III



Martin Hoferichter

Albert Einstein Center für fundamentale Physik

Institut für theoretische Physik

Universität Bern

Herbstsemester 2021

Dies ist die Fortsetzung des Skripts *Mathematische Methoden der Physik I und II* im Herbstsemester 2020 und Frühlingssemester 2021. Die Kapitel und Seiten wurden fortlaufend nummeriert. Dieser dritte Teil beginnt daher mit Kapitel 22 und Seite 185.

Der erste Teil des vorliegende Textes über Distributionstheorie basiert auf dem Skript von Prof. Christoph Greub, editiert von Profs. Urs Wenger und Uwe-Jens Wiese.

Der zweite Teil über komplexe Analysis basiert auf den Lehrbüchern von Arfken/Weber/Harris und Fischer/Lieb, entsprechend meiner Vorlesung im Herbstsemester 2020. Ich danke Pascal Tijkorte für das sorgfältige Setzen in L^AT_EX.

Martin Hoferichter

Bern, September 2021

Vorbemerkung

Hier konzentrieren wir uns vor allem auf das Erlernen von Techniken und deren Anwendungen, und nicht auf die mathematische Strenge in den Herleitungen. Diese Strenge wird in den Mathematikvorlesungen vermittelt – die vorliegende Veranstaltung kann und will diese Vorlesungen auf keinen Fall ersetzen, sondern ergänzen.

Literatur

- Chun Wa Wong, Math. Physik, Konzepte, Methoden, Übungen, Akad. Verlag Spektrum (MCA 206)
- Courant, Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 2 Bände, Springer Verlag (MCA 141)
- Schaum, Fourier-Analysis, Theorie und Anwendungen, McGraw-Hill Book Company, Viele Übungen werden vorgelöst (GKA 132)
- I. M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized functions, Volume I; Properties and Operations, Academic Press (GTH 134)
- J. P. Marchand, Distributions – an outline. North Holland Publ. Company (GTH 130)
- F. Constantinescu, Distributionen und ihre Anwendung in der Physik, Teubner Studienbücher Mathematik (GTH 129)
- G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, Mathematical methods for physicists, Elsevier Verlag (MCA 232)
- W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg Verlag.
- Schaum, Komplexe Variablen, Theorie und Anwendungen, McGraw-Hill Book Company (GGA 240)

Inhaltsverzeichnis

22 Erzwungene Schwingungen mit bel. Antrieb; δ-Fkt., Green'sche Fkt.	185
22.1 Antrieb harmonisch	186
22.2 Kraftstoss auf ein freies Teilchen	188
22.3 Gedämpfte Schwingung. Antrieb: Kraftstoss	190
22.4 Gedämpfte Schwingung. Antrieb: beliebig	192
23 Distributionen	195
23.1 Der Raum S der stark abfallenden Funktionen	196
23.2 Distributionen	198
23.3 Der Vektorraum S' der Distributionen	199
23.4 Reguläre Distributionen	199
23.5 Die singuläre Distribution $T(\varphi) = \varphi(0)$	200
23.6 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx = \varphi(0); \quad \forall \varphi \in S$	201
23.7 Die Distribution $\delta(x - x_0)$	204
23.8 Rechnen mit Distributionen	205
23.8.1 Zusätzliche Notation; Zusammenfassung einiger Aussagen .	205
23.8.2 Multiplikation von Distributionen	206
23.8.3 Multiplikation mit glatter Funktion	206

23.8.4	Ableitung von Distributionen	207
23.9	$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta(x)$	209
23.10	$\delta[g(x)] = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{ g'(x_\nu) } \delta(x - x_\nu)$	211
23.11	Fourier-Darstellung der δ -Funktion	214
23.12	Die + Distribution	216
24	Die inhomogene Wellengleichung	217
24.1	Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen	217
24.2	Darstellung via Green'sche Funktion	220
24.3	Verifikation, dass $\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)$	222
23	Komplexe Analysis	225
23.1	Komplexe Differenzierbarkeit	225
23.2	Cauchy Integralformel	232
23.2.1	Satz von Cauchy	232
23.2.2	Cauchy Integralformel	238
23.2.3	Beweis (-skizze) nach Goursat	240
23.2.4	Stammfunktion	241
23.2.5	Satz von Morera	242
23.3	Potenzreihen	243
23.3.1	Cauchysche Ungleichung	243

23.3.2	Weierstrassscher Konvergenzsatz	244
23.3.3	Eulersche Funktion	246
23.3.4	Umkehrfunktion	247
23.3.5	Identitätssatz für holomorphe Funktionen	248
23.4	Isolierte Singularität und Laurentreihen	251
23.4.1	Meromorphe Funktion	253
23.4.2	Fundamentalsatz der Algebra	256
23.5	Logarithmus, Schnitte, Riemann-Blätter	257
23.5.1	Riemannblätter	262
23.6	Analytische Fortsetzung	264
23	Residuensatz und Anwendungen	267
23.1	Residuensatz	267
23.2	Reelle Integrale	272
23.3	Weitere Beispiele	275
23.4	Greensche Funktionen	283
23.5	Gamma- und Zeta-Funktionen	286
23.6	Auswertung von Summen über den Residuensatz	292
23.7	Schwarzsches Spiegelungsprinzip und Dispersionsrelationen	295
G	Die δ-Funktion	301

G.1	Elementare Definition	301
G.2	Distributionen	301
G.3	Differentiation von Distributionen	304
G.4	Weitere Rechenregeln	304
	G.4.1 Beweis der Dgl. (22.32)	306
G.5	Mehrdimensionale δ -Funktionen	306
G.6	Diverse Anmerkungen	307

22 Erzwungene Schwingungen mit bel. Antrieb; δ -Fkt., Green'sche Fkt.

Es geht darum, das Kapitel 3 über Schwingungen im Kurs “Mechanik I mit Relativitätstheorie” zu ergänzen. Wir haben dort nur freie ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen besprochen und haben auf eine Diskussion der erzwungenen Schwingungen verzichtet. Im folgenden wollen wir zuerst die allgemeine Lösung der erzwungenen Schwingung mit den harmonischen Antriebsfunktionen $f(t) = \cos(\omega t)$ und $f(t) = \sin(\omega t)$ studieren. Wie wir sehen werden, gelangen wir in diesem Fall mit geeigneten elementaren Ansätzen zum Ziel. In einem weiteren Schritt wollen wir dann das analoge Problem mit beliebigen Antriebsfunktionen in Angriff nehmen. Dazu werden wir mit dem Antrieb durch einen kurzen Kraftstoss beginnen und dabei die δ -Funktion und den Begriff der Green'schen Funktion kennenlernen. Mithilfe der Green'schen Funktion kann dann die Lösung für beliebigen Antrieb sofort angegeben werden.

Die Differentialgleichung für eine eindimensionale erzwungene Schwingung lautet

$$m \ddot{x} + \Gamma \dot{x} + K x = F(t) , \quad (22.1)$$

wobei $F(t)$ die vorgegebene Antriebskraft ist. Wir betrachten hier den gedämpften Fall ($\Gamma \neq 0$). Mit den Abkürzungen

$$\gamma = \Gamma/m ; \quad \omega_0^2 = K/m ; \quad f(t) = F(t)/m \quad (22.2)$$

ergibt sich die Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) . \quad (22.3)$$

Aus dem Mechanik-I Kurs wissen wir, dass sich die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Gleichung gewinnen lässt, indem wir zur allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22.4)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung addieren. Bei der Lösung der homogenen Gleichung haben wir die drei Fälle unterschieden:

- (a) schwache Dämpfung ($\gamma/2 < \omega_0$) $\longrightarrow$ Lösung in Gl. (3.31) Mechanik-I

(b) kritische Dämpfung ($\gamma/2 = \omega_0$) $\longrightarrow$ Lösung in Gl. (3.33) Mechanik-I

(c) starke Dämpfung ($\gamma/2 > \omega_0$) $\longrightarrow$ Lösung in Gl. (3.35) Mechanik-I

Da wir den Fall für schwache Dämpfung in diesem Kapitel noch brauchen werden, geben wir diese Lösung explizit an. Sie lautet in reeller Schreibweise (c und φ sind beliebige reelle Konstanten)

$$x(t) = c e^{-\gamma t/2} \cos(\Omega t - \varphi) ; \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}. \quad (22.5)$$

Es genügt also im folgenden, eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems zu konstruieren. Wir betrachten zuerst spezielle Antriebe $f(t)$, für welche sich eine partikuläre Lösung leicht finden lässt; zuletzt betrachten wir die Konstruktion einer partikulären Lösung für beliebigen Antrieb $f(t)$.

22.1 Antrieb harmonisch

Zum komplexen Antrieb $f_c(t) = e^{i\omega t}$ ($\omega > 0$) lässt sich eine partikuläre Lösung von (22.3) mithilfe des Ansatzes

$$x_c(t) = A e^{i\omega t} \quad (22.6)$$

finden; einsetzen:

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) A e^{i\omega t} = e^{i\omega t}. \quad (22.7)$$

Es liegt tatsächlich eine Lösung vor, mit der Amplitude

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (22.8)$$

A lässt sich auch als Betrag $\times$ Phasenfaktor schreiben

$$A = |A(\omega)| e^{-i\psi(\omega)}, \quad (22.9)$$

wobei

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad (22.10)$$

$$\tan \psi(\omega) = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (22.11)$$

Aus $\gamma > 0$, $\omega > 0$ folgt $\text{Im}(A) < 0$. Somit lässt sich ψ im Bereich $0 \leq \psi \leq \pi$ wählen. Schliesslich ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}\{x_c(t)\} = \text{Re}\{A e^{i\omega t}\} \\ &= \text{Re}\{|A(\omega)| e^{-i\psi(\omega)} e^{i\omega t}\} \\ &= |A(\omega)| \cos[\omega t - \psi(\omega)] \end{aligned} \quad (22.12)$$

eine partikuläre Lösung zum reellen Antrieb $f(t) = \cos(\omega t)$. Amplitude $|A|$ und Phase ψ sind nach (22.10) und (22.11) durch die gegebenen Parameter γ , ω_0 , ω bestimmt.

Diskussion

i) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t) \quad (22.13)$$

lautet also

$$x(t) = x_h(t) + |A(\omega)| \cos[\omega t - \psi(\omega)]; \quad (22.14)$$

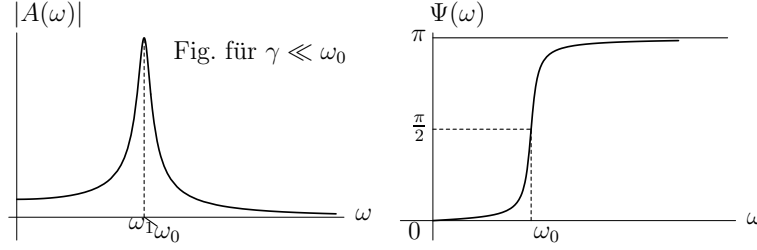
dabei ist x_h die allgemeine Lösung [(3.31), (3.33) oder (3.35) Mechanik-I] der homogenen Gleichung (22.4). Der Anfangszustand $x(0)$, $\dot{x}(0)$ legt die beiden Parameter in x_h fest. Aus den expliziten Formen von x_h ist ersichtlich, dass der erste Term in (22.14) nach hinreichend langer Zeit beliebig klein wird. Übrig bleibt dann nur der durch den Antrieb bestimmte zweite Term (harmonische Schwingung, sogenannte *eingeschwungene Lösung*).

ii) Die Amplitude $|A(\omega)|$ ist bei festen Parametern ω_0 , γ von der Antriebsfrequenz abhängig. Wir suchen die Frequenz $\omega = \omega_1$, für welche $|A(\omega)|$ das Maximum annimmt. Aus $\frac{d}{d\omega}|A(\omega)| = 0$ und mit (22.10) erhält man für schwache bzw. starke Dämpfung

$$\omega_1 = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}, & \gamma^2/2 < \omega_0^2 \\ 0, & \gamma^2/2 > \omega_0^2. \end{cases} \quad (22.15)$$

Im Falle schwacher Dämpfung nennt man ω_1 die *Resonanzstelle*, oder *Resonanzfrequenz*. Bei sehr schwacher Dämpfung ($\gamma \ll \omega_0$) ist $\omega_1 \approx \omega_0$. Die maximale Amplitude beträgt dann nach (22.10) näherungsweise $1/(\gamma\omega_0)$.

Die Situation ist in der Figur illustriert.



22.2 Kraftstoss auf ein freies Teilchen

Auf ein Teilchen, welches bis zum Zeitpunkt 0 ruht, soll im Zeitintervall $[0, \tau]$ eine Kraft einwirken, welche das Teilchen bis zum Zeitpunkt τ auf die Geschwindigkeit v beschleunigt. Anschliessend soll sich das Teilchen kräftefrei weiterbewegen. Diese Kraft lässt sich in der Form

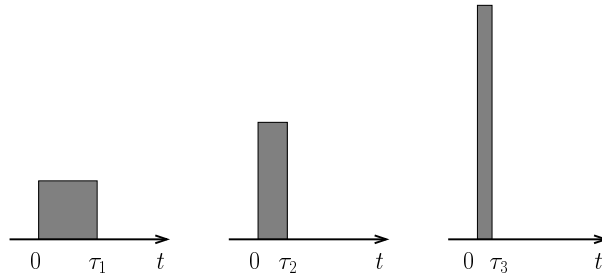
$$F(t) = m v \delta_\tau(t) \quad (22.16)$$

darstellen, wobei die Funktion $\delta_\tau(t)$ die folgenden Eigenschaften aufweisen muss:

$$\delta_\tau(t) = 0 \quad \text{ausserhalb des Intervalles } [0, \tau] \quad (22.17)$$

$$\int dt \delta_\tau(t) = 1. \quad (22.18)$$

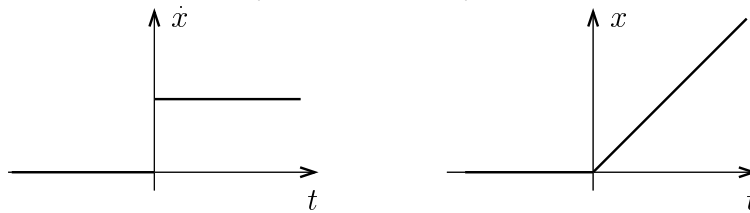
Während des Beschleunigungsvorganges bewegt sich das Teilchen um eine Strecke der Grössenordnung $s = v \tau$. Wir lassen nun τ immer kleinere Werte annehmen, wobei v fest sein soll: die Funktionen δ_τ bilden eine Folge von immer höheren und schmälere Funktionen, wobei $\int dt \delta_\tau(t) = 1$ fest bleibt.



Die Funktion δ_τ existiert im Limes $\tau \rightarrow 0$ nicht. Hingegen ist die Wirkung auf das Teilchen bei $\tau = 0$ sehr einfach zu beschreiben: $s \rightarrow 0$, und die Geschwindigkeit ändert als Funktion der Zeit unstetig vom Wert 0 auf den Wert v ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v \theta(t), \text{ wobei} \\ \theta(t) &= \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (22.19)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ vt & , \quad t \geq 0 \end{cases} = \theta(t) vt \quad (22.20)$$



Die beschriebene Folge von Kräften heisst *Kraftstoss* (etwas lockerer gesprochen: unter dem Kraftstoss versteht man die Kraft, welche die Bewegung (22.20) erzeugt). Es lassen sich beliebig viele verschiedene Folgen von Funktionen $\delta_\tau(t)$ vorstellen, welche in der Grenze $\tau \rightarrow 0$ dieselbe Wirkung zeigen: massgebend ist einzig, dass die zeitliche Dauer τ der Kraftwirkung gegen Null geht, und dass $\int dt \delta_\tau(t) = 1$.

Man bezeichnet die Folge δ_τ ($\tau \rightarrow 0$) als δ -Folge, den Grenzwert als $\delta(t)$ -Funktion. Kommentar:

- Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen Sinne.
- Intuitive Vorstellung: “die δ -Funktion ist sehr schmal, und so hoch, dass die Fläche darunter gleich 1 ist”.
- Formal lässt sich das betrachtete Problem durch die Gleichung

$$m \ddot{x}(t) = m v \delta(t) \quad (22.21)$$

beschreiben - dabei ist mit $x(t)$ der Grenzwert einer Folge von Bewegungen gemeint.

Ein Kraftstoss zum Zeitpunkt t' kann in der Form

$$F(t) = m v \delta(t - t') \quad (22.22)$$

notiert werden.

22.3 Gedämpfte Schwingung. Antrieb: Kraftstoss

Welche Bewegung führt ein gedämpfter Oszillator aus, wenn er einem Kraftstoss der Form (22.22) ausgesetzt wird

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = v \delta(t) \quad ? \quad (22.23)$$

In der Grenze $\tau \rightarrow 0$ lässt sich die Lösung in wenigen Schritten finden:

- Wir setzen voraus, der Oszillator sei vor dem Zeitpunkt 0 in Ruhe:

$$x(t) = 0, \quad t < 0. \quad (22.24)$$

- Die Reibungs- und Federkraft ändern nichts daran, dass der Kraftstoss zum Zeitpunkt 0 die unstetige Geschwindigkeitsänderung $\dot{x}(0_+) - \dot{x}(0_-) = v$ erzeugt. Zwar erreicht die Reibungskraft $\sim \dot{x}$ bereits während des Stosses endliche Werte, aber wegen $\tau \rightarrow 0$ wirkt sie sich nicht auf $\dot{x}(0_+)$ aus; auch die elastische Kraft wirkt sich nicht aus. In der Grenze $\tau \rightarrow 0$ ist der während des Beschleunigungsvorganges zurückgelegte Weg s wiederum Null (Abschätzung: $s < \tau \dot{x}(0_+)$). Damit kennen wir den Zustand unmittelbar nach dem Kraftstoss:

$$\begin{aligned} x(0_+) &= 0 \\ \dot{x}(0_+) &= v. \end{aligned} \quad (22.25)$$

- Für $t > 0$ bewegt sich der Oszillator nun nach der homogenen Gleichung weiter ($f = 0$). Unter der Voraussetzung schwacher Dämpfung ($\gamma/2 < \omega_0$) ist die Lösung (22.5) an die Anfangsbedingung (22.25) anzupassen; dies ergibt

$$x(t) = \frac{v}{\Omega} e^{-\gamma t/2} \sin(\Omega t), \quad t \geq 0. \quad (22.26)$$

Mithilfe der θ -Funktion (22.19) lassen sich (22.24) und (22.26) zusammenfassen:

$$x(t) = \theta(t) \frac{v}{\Omega} e^{-\gamma t/2} \sin(\Omega t). \quad (22.27)$$

Kommentare:

- Beachte, dass (22.27) eine partikuläre Lösung darstellt (jene zur Anfangsbedingung $x(t < 0) = 0$).
- Für einen Kraftstoss, welcher zum Zeitpunkt t' stattfindet, lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = v \delta(t - t'), \quad (22.28)$$

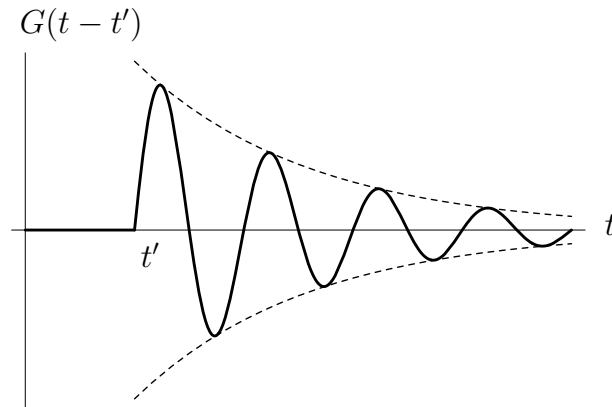
und ihre Lösung

$$x(t) = \theta(t - t') \frac{v}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin[\Omega(t - t')]. \quad (22.29)$$

Wir spalten noch den Faktor v ab, um die *Green'sche Funktion* G zu definieren, welche wir zur Konstruktion der Lösung im Falle beliebiger Antriebsfunktion brauchen werden

$$x(t) = v G(t - t') \quad (22.30)$$

$$G(t - t') = \theta(t - t') \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma(t-t')/2} \sin[\Omega(t - t')]. \quad (22.31)$$



Die Green'sche Funktion $G(t)$ erfüllt also die Differentialgleichung

$$\ddot{G}(t) + \gamma \dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t). \quad (22.32)$$

An dieser Stelle möchte man durch Ableiten direkt verifizieren, dass die Green'sche Funktion $G(t)$ in der Tat diese Differentialgleichung erfüllt. Dabei

trifft man auf eine Schwierigkeit: An der Stelle $t = 0$ ist $G(t)$ nicht im üblichen Sinne differenzierbar (siehe obige Figur bei $t = t'$). Das äussert sich darin, dass die *Inhomogenität* der Dgl. (22.32) nicht eine Funktion im üblichen Sinne ist, wie wir oben schon festgestellt haben. In der Physik trifft man häufig auf Funktionen dieser Art (Elektrodynamik, Quantentheorie, Quantenfeldtheorie,...) - sie heissen im Fachjargon *Distributionen*. Eine Diskussion e.g. der Elektrodynamik ohne Distributionen wäre sehr schwerfällig, eine Darstellung der Quantenmechanik kaum möglich und nicht sinnvoll. In der Tat wurden die Distributionen im Rahmen der Quantenmechanik im letzten Jahrhundert von P. Dirac eingeführt (1927). Eine mathematisch saubere Formulierung der Theorie der Distributionen erfolgte um 1950 von L. Schwartz.

Deshalb verlassen wir an dieser Stelle den Haupttext und diskutieren im Anhang G das Rechnen mit diesen Objekten. Wir werden nach diesem Ausflug zurückkommen auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) . \quad (22.33)$$

Sie beschreibt eine erzwungene, gedämpfte Schwingung. Mithilfe der Green'schen Funktion $G(t)$ wird es uns möglich sein, die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für beliebige Antriebsfunktionen $f(t)$ anzugeben.

22.4 Gedämpfte Schwingung. Antrieb: beliebig

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung von

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (22.34)$$

zu einer beliebig vorgegebenen Antriebsfunktion $f(t)$. Mithilfe der Green'schen Funktion $G(t)$ lässt sich eine Lösung sofort angeben. In der Tat weist man leicht nach, dass eine partikuläre Lösung gegeben ist durch

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t') . \quad (22.35)$$

22.1 Übung

Beweise, unter Verwendung von (22.32), dass x_p die Dgl. (22.34) erfüllt.

Kommentar:

- Die allgemeine Lösung der Gleichung (22.34) kann als Summe der partikulären Lösung (22.35) und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung dargestellt werden. Letztere ist für den hier betrachteten Fall der schwachen Dämpfung durch (22.5) gegeben. Man hat deshalb

$$x(t) = c e^{-\gamma t/2} \cos(\Omega t - \varphi) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t'). \quad (22.36)$$

- Die vorliegende partikuläre Lösung zeichnet sich dadurch aus, dass sie vor Beginn des Antriebes verschwindet (betrachte den Fall, dass $f(t)$ für $t < t_0$ verschwindet). Gleichbedeutend ist die Feststellung, dass sich die Kraft zum Zeitpunkt t' nicht auf die Lösung zu früheren Zeiten auswirkt (siehe die θ -Funktion in G). Man nennt diese partikuläre Lösung die *kausale* Lösung (f ist die Ursache, x die Wirkung).
- Die Green'sche Funktion G ist die Lösung der inhomogenen Gleichung mit einer δ -Funktion als Inhomogenität. Dieselbe Funktion dient uns in (22.35) dazu, die partikuläre Lösung zu einer beliebigen Inhomogenität zu konstruieren.
- Wir haben hier den Fall der schwachen Dämpfung vorausgesetzt ($\gamma/2 < \omega_0$). Für kritische oder starke Dämpfung erhält man andere Green'sche Funktionen.

22.2 Übung

Berechne die partikuläre Lösung x_p für den Antrieb $f(t) = \cos(\omega t)$. Konvergiert das Integral (22.35)? Ergibt sich dasselbe Resultat wie in Abschnitt 22.1?

22.3 Übung

Behandle mit denselben Methoden die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + \gamma x(t) = f(t).$$

- In welcher Situation tritt diese Gleichung auf?
- Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung?
- Lösung für harmonischen Antrieb?
- Wie lautet die kausale Lösung von $\dot{x}(t) + \gamma x(t) = \delta(t - t')$?
- Mit dem Resultat von d) lässt sich eine Green'sche Funktion einführen und eine partikuläre Lösung für eine beliebige Inhomogenität konstruieren.
- Das Resultat von e) stimmt nicht mit der in Übung 3.3 (Mechanik-I) betrachteten Lösung (3.18) (Mechanik-I) überein. Diskutiere den Unterschied.

22.4 Übung

Harmonischer Antrieb eines stark gedämpften harmonischen Oszillators. Partikuläre Lösung?

22.5 Übung

Betrachte die Differentialgleichung $m\ddot{x} = F(t)$; sei $F(t) = 0$ für $t < 0$.

a) Partikuläre Lösung mit der Eigenschaft $x(t) = 0$ für $t < 0$?

b) Zeige, dass sich diese als

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_0(t - t') F(t') \quad (22.37)$$

darstellen lässt. Wie lautet der Ausdruck für $G_0(t)$?

c) Trifft es zu, dass die Green'sche Funktion (22.30) in der Grenze $\gamma \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow 0$ in G_0 übergeht?

23 Distributionen

Was sind Distributionen?

M sei ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

$T: M \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildung

T heisst Funktional (weil der Bildbereich aus den komplexen Zahlen besteht).

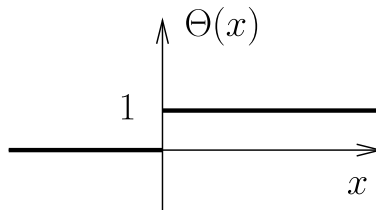
Seien $f_1, f_2 \in M$. Dann ist auch $\alpha f_1 + \beta f_2 \in M$. Ein Funktional T heisst linear, falls gilt:

$$T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha T(f_1) + \beta T(f_2).$$

Distributionen sind lineare Funktionale über speziellen Vektorräumen M . Zusätzlich wird noch gefordert, dass die Funktionale stetig sind.

Fragen: Was sind diese speziellen Vektorräume? Was bedeutet stetig? Wie rechnet man mit Distributionen?

Beispiel: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



Diese Funktion ist nicht differenzierbar im Sinne der gewöhnlichen Analysis, denn sie ist bei $x = 0$ nicht einmal stetig. Man kann aber $\theta(x)$ auch als Distribution auffassen: $\rightarrow$ Beliebig oft differenzierbar!

Distributionen spielen eine wichtige Rolle in der Physik; sie treten häufig auf in Anwendungen.

Mathematische Literatur:

- 1) I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized functions, Volume I; Properties and

Operations, Academic Press (GTH 134)

2) J.P. Marchand, Distributions – an outline. North Holland Publ. Company (GTH 130)

3) F. Constantinescu, Distributionen und ihre Anwendung in der Physik, Teubner Studienbücher Mathematik (GTH 129)

23.1 Der Raum S der stark abfallenden Funktionen

Betrachte die Menge S der im Unendlichen stark abfallenden Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

- i) $\varphi(x)$ beliebig oft differenzierbar ($\varphi(x) \in C^\infty$)
- ii) $\varphi(x)$ fällt, zusammen mit allen Ableitungen $\varphi^{(n)}(x)$, im Unendlichen stärker ab als jede natürliche Potenz von $\frac{1}{x}$:

$$\sup_x |x^m \varphi^{(n)}(x)| \leq C_{m,n}(\varphi) ; \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 .$$

Dabei bedeuten $C_{m,n}(\varphi)$ Konstanten, die von der betreffenden Funktion $\varphi(x)$ abhängen dürfen.

Beispiele:

$$e^{-x^2} \in S ; \quad \frac{1}{1+x^{10}} \notin S .$$

S wird auf natürliche Weise zu einem linearen Raum:

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(x) \doteq \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x) \quad \varphi_{1,2} \in S ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

Es ist einfach zu zeigen, dass S ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. (Dieser Vektorraum ist ∞ -dimensional).

Der Funktionenraum S wird im folgenden die Rolle des Vektorraumes M (siehe Anfang von Kapitel 23) übernehmen.

Distributionen = stetige, lineare Funktionale über S .

Es wird einfach zu definieren sein, was mit linearen Funktionalen über S gemeint ist. Um definieren zu können, was stetige lineare Funktionale sein sollen, brauchen wir zuerst einen Konvergenzbegriff in S .

Konvergenz in S

$\varphi_\nu(x); \quad \nu \in \mathbb{N}_0 : \quad$ Folge von Funktionen aus S

Definition: Die Funktionenfolge φ_ν konvergiert gegen die Nullfunktion $\underline{0}$

$$\varphi_\nu \longrightarrow \underline{0} \quad (\nu \rightarrow \infty),$$

falls

$$\sup_x |x^m \varphi_\nu^{(n)}(x)| \longrightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiele:

1) $\varphi_\nu(x) = e^{-\nu x^2}$ ist in S ($\forall \nu$), denn

Gilt $\varphi_\nu \rightarrow \underline{0}$? Nein! Nimm $m = n = 0$.

$$\sup_x |\varphi_\nu(x)| = 1 \quad (\forall \nu) \not\rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

(“Problem” kommt von $x = 0$)

$$2) \quad \varphi_\nu(x) = \frac{1}{x^2 + \nu^2} e^{-\nu x^2}$$

$$\varphi_\nu \rightarrow \underline{0} \quad (\nu \rightarrow \infty)$$

Definition: Sei φ_ν eine Funktionenfolge in S , und $\hat{\varphi}$ eine weitere Funktion aus S . Die Funktionenfolge φ_ν strebt genau dann gegen die Grenzfunktion $\hat{\varphi}$, wenn die Folge $(\varphi_\nu - \hat{\varphi})$ gegen die Nullfunktion konvergiert. In Formeln:

$$\varphi_\nu \rightarrow \hat{\varphi} \iff \varphi_\nu - \hat{\varphi} \rightarrow \underline{0} \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

Zusammengefasst:

S : Raum der stark abfallenden, unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

S hat Vektorraumstruktur: $\varphi_1, \varphi_2 \in S \longrightarrow \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \in S$

Konvergenzbegriff $\varphi_\nu \rightarrow \hat{\varphi}$ erklärt.

Elemente aus S heissen Testfunktionen.

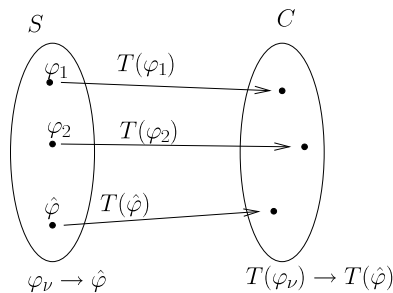
Details des Konvergenzbegriffs sind nicht sehr wesentlich im folgenden.

23.2 Distributionen

Definition: Ein lineares Funktional T über S heisst stetig, falls für jede konvergente Funktionenfolge $\varphi_\nu \in S$ gilt:

$$T\left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T(\varphi_\nu)$$

Bemerkung: Auf der linken Seite geht es um Konvergenz in S , auf der rechten Seite um Konvergenz in $\mathbb{C}$.



Definition: Eine Distribution T ist ein lineares, stetiges Funktional über S :

- 1) $T : S \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall \varphi \in S$: Funktional
- 2) $T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$: linear
- 3) $T(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T(\varphi_\nu)$: stetig

Bemerkung: Man kann auch Distributionen über anderen (geeigneten) Funktionenräumen definieren. Distributionen über S werden in der Literatur häufig temperierte Distributionen genannt. Wir lassen das Adjektiv “temperiert” weg, da wir in dieser Vorlesung nur Distributionen über S behandeln werden.

Übung: Sind die folgenden Funktionale über S Distributionen?

- a) $T(\varphi) = \varphi(0)$

b) $T(\varphi) = \varphi^{(n)}(0)$

c) $T(\varphi) = \varphi(13)$

d) $T(\varphi) = |\varphi(0)|^2$

e) $T(\varphi) = e^{\varphi(0)}$

23.3 Der Vektorraum S' der Distributionen

S' : Menge der Distributionen über S . Seien $T_1, T_2 \in S'$. Man kann auf natürliche Weise Linearkombinationen von Distributionen bilden:

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)(\varphi) = \alpha T_1(\varphi) + \beta T_2(\varphi).$$

S' ist dann ein (∞ -dim.) Vektorraum über $\mathbb{C}$.

23.4 Reguläre Distributionen

$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine beliebige Funktion. Wir können versuchen, damit eine Distribution T_f zu definieren:

$$T_f(\varphi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S.$$

Die Funktion f muss gewisse Bedingungen erfüllen, damit das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ existiert.

$f(x) = e^{x^2}$ geht nicht, da zu stark anwachsend.

$f(x) = 1/x$ geht auch nicht, da Problem bei $x = 0$.

Definition: f heisst lokal integrierbar, falls

(a) $\int_I |f(x)|dx$ auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ existiert.

(b) $f(x)$ wachse nicht schneller als eine Potenz von x (für $x \rightarrow \infty$).

Satz:

$$T_f(\varphi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S$$

definiert eine Distribution auf S , falls $f(x)$ lokal integrierbar ist.

Zu zeigen:

- 1) $\forall \varphi \in S$ ist obiges Integral definiert (leicht)
- 2) Linearität (trivial)
- 3) Stetigigkeit (schwierigster Teil)

Eine Distribution $T(\varphi)$, die sich (für geeignetes $f(x)$) als $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ darstellen lässt, heisst reguläre Distribution.

Es sei hier vorweggenommen: Nicht jede Distribution ist regulär. Nicht-reguläre Distributionen heissen singuläre Distributionen.

Aber: Jede singuläre Distribution kann als Limes einer Folge von regulären Distributionen dargestellt werden.

Dies ist der Inhalt der folgenden Abschnitte.

23.5 Die singuläre Distribution $T(\varphi) = \varphi(0)$

Satz: Die durch $T(\varphi) = \varphi(0)$ definierte Distribution ist singulär. D.h., es gibt keine lokal integrierbare Funktion $\delta(x)$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in S.$$

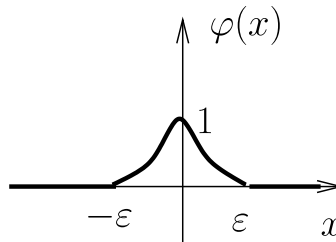
Beweis: Gegenannahme, es gäbe eine solche Funktion $\delta(x)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\delta(x)| dx < \frac{1}{2}.$$

Ein solches ε existiert, weil $\delta(x)$ lokal integrierbar ist; man muss nur ε klein genug wählen.

Um einen Widerspruch zu erzeugen, wählen wir eine Testfunktion, deren qualitative Eigenschaften in der folgenden Figur zum Ausdruck kommen.



Dass Testfunktionen $\varphi(x)$ (d.h Funktionen in S) existieren, die ausserhalb des Intervalls $[-\varepsilon, \varepsilon]$ exakt verschwinden (wie in der Zeichnung angedeutet), ist nicht-trivial!

Für das so konstruierte $\varphi(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(0) = 1 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(x)| |\varphi(x)| dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\delta(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\delta(x)| dx < \frac{1}{2},\end{aligned}$$

wobei wir also einen Widerspruch, nämlich $1 < 1/2$, hergeleitet haben $\square$

Man sieht aber trotzdem häufig die Gleichung

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

und nennt $\delta(x)$ “die Delta-Funktion”. Die Gleichung ist im Sinne des nächsten Unterkapitels gemeint.

$$\mathbf{23.6} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx = \varphi(0); \quad \forall \varphi \in S$$

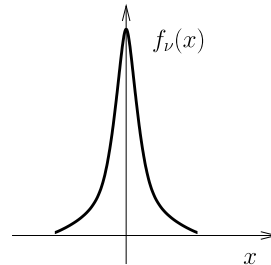
Man nennt die Funktionenfolge

$$f_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2}$$

wegen der in der Überschrift genannten Eigenschaft eine “Darstellung” der δ -Funktion.

Betrachten wir zuerst die Eigenschaften der Funktionen $f_\nu(x)$:

$$\begin{aligned} x \neq 0 : \quad f_\nu &\rightarrow 0 \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty \\ x = 0 : \quad f_\nu &\rightarrow \infty \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$



Wir wollen jetzt die Gleichung in der Überschrift herleiten, d.h, wir wollen für beliebiges $\varphi(x) \in S$ den Ausdruck

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx$$

berechnen. Die die Umgebung von $x = 0$ besonders interessant ist, spalten wir das Integrationsgebiet auf ($\delta > 0$ vorerst festgehalten):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\delta} \dots}_{G_1} + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \dots}_{G_2} + \underbrace{\int_{\delta}^{\infty} \dots}_{G_3}$$

Wir betrachten im folgenden die Beiträge der 3 Gebiete G_1 – G_3 .

G_1 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \left| \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \right| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{1 + \nu^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{-\delta} |\varphi(x)| dx \\ &\rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

G_3 : analog: $\rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$

G_2 :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx$$

Zerlege $\varphi(x)$ gemäss

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + xR(x) ; \quad R(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} . \\ \rightarrow \quad &\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(0) dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\nu x}{1 + \nu^2 x^2} R(x) dx}_{I_2} \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \varphi(0) \arctan(\nu x) \Big|_{-\delta}^{\delta} = \frac{1}{\pi} \varphi(0) [\arctan(\nu \delta) - \arctan(-\nu \delta)]$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{1}{\pi} \varphi(0) \pi = \varphi(0) \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

I_2 : Partielle Integration anwenden:

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\frac{\nu x}{1 + \nu^2 x^2}}_{u'} \underbrace{R(x)}_v dx; \quad \rightarrow u = \frac{1}{2\nu} \log(1 + \nu^2 x^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\nu} \log(1 + \nu^2 x^2) R(x) \Big|_{-\delta}^{\delta} - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\nu} \log(1 + \nu^2 x^2) R'(x) dx$$

$$I_2 = \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{1}{2\nu} \log(1 + \nu^2 \delta^2) [R(\delta) - R(-\delta)]}_{\rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)} - \frac{1}{2\nu\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \log(1 + \nu^2 x^2) R'(x) dx$$

$$\left| \frac{1}{2\nu\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \log(1 + \nu^2 x^2) R'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2\nu\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \log(1 + \nu^2 x^2) |R'(x)| dx$$

$$\leq \frac{1}{2\nu\pi} \log(1 + \nu^2 \delta^2) \int_{-\delta}^{\delta} |R'(x)| dx$$

$$\rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$$

Zusammengefasst:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx = \varphi(0); \quad \forall \varphi \in S \quad \square$$

Rekapitulation: $T(\varphi) = \varphi(0)$ ist eine singuläre Distribution, denn es gibt keine Funktion $\delta(x)$ so, dass für alle $\varphi \in S$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (23.1)$$

Aber: $T(\varphi)$ kann als Folge von regulären Distributionen dargestellt werden:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (23.2)$$

Wegen (23.2) kann man der Gleichung (23.1) doch einen vernünftigen Sinn geben: Man fasse einfach $\delta(x)$ auf als

$$\delta(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2}, \quad (23.3)$$

wobei der Limes $\nu \rightarrow \infty$ nach der Integration ausgeführt werden soll.

Die Gleichung (23.3) wird oft als eine Darstellung der δ -Funktion bezeichnet.

Bemerkung: Wir haben die speziell gewählte singuläre Distribution $T(\varphi) = \varphi(0)$ als Folge von regulären Distribution dargestellt. Es gilt der folgende sehr allgemeine Satz:

Satz: Jede (singuläre) Distribution kann als Folge von regulären Distributionen dargestellt werden.

Bemerkung: Es gibt auch andere Darstellungen der Delta-Funktion als diejenige in Gleichung (23.3):

(a)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \delta(x).$$

(b)

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\nu \sqrt{\pi}} e^{-x^2/\nu^2} = \delta(x).$$

(c)

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & x \in [-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f_\nu(x) = \delta(x).$$

23.7 Die Distribution $\delta(x - x_0)$

Aus dem vorangegangenen Unterkapitel wissen wir, dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{1 + \nu^2 x^2} \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Betrachte nun die Funktionenfolge

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{1 + \nu^2(x - x_0)^2} \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Offenbar gilt (Beweis durch Substitution: $x - x_0 = x'$):

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

Diese Beziehung kann man formal schreiben als

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = \delta(x - x_0).$$

23.8 Rechnen mit Distributionen

23.8.1 Zusätzliche Notation; Zusammenfassung einiger Aussagen

Häufig wird die Wirkung einer Distribution T auf eine Testfunktion φ geschrieben als

$$(T, \varphi)$$

anstelle von $T(\varphi)$.

- Falls die Wirkung einer vorgegebenen Distribution T auf alle Testfunktionen $\varphi \in S$ dargestellt werden kann als

$$(T, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad (f \text{ lokal integrierbar})$$

heisst T regulär.

- Sei (T, φ) vorgegeben. Manchmal kann die Distribution nicht wie im vorangehenden Punkt dargestellt werden und die Distribution heisst dann singulär. Aber:

$$\exists \text{ immer Funktionenfolgen } f_\nu \text{ mit } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x) \varphi(x) dx = (T, \varphi)$$

$\Rightarrow$ Jede Distribution ist mit Integralen darstellbar.

Wir schreiben von jetzt an Distributionen oft auf folgende Weise:

$$(T, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx = \int T(x)\varphi(x)dx$$

unabhängig davon, ob T regulär ist oder nicht.

23.8.2 Multiplikation von Distributionen

Es seien die Distributionen T_1 und T_2 gegeben, d.h.,

$$\int T_1(x)\varphi(x)dx ; \quad \int T_2(x)\varphi(x)dx \quad \text{definiert.}$$

$$\exists \text{ Produkt } \int T_1(x)T_2(x)\varphi(x)dx ?$$

Im allgemeinen ist es nicht möglich, auf diese Art ein Produkt von Distributionen zu definieren! Es gibt schon Probleme bei zwei regulären Distributionen, wie das folgende Beispiel illustrieren soll.

Beispiel:

$$T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} = T_2(x)$$

T_1 und T_2 sind wohldefinierte reguläre Distributionen. Das Produkt $T_1(x)T_2(x) = 1/|x|$ stellt keine Distribution dar, weil

$$\int T_1(x)T_2(x)\varphi(x)dx = \int \frac{1}{|x|}\varphi(x)dx$$

im allg. nicht existiert (Integrand zu singulär bei $x = 0$).

23.8.3 Multiplikation mit glatter Funktion

(T, φ) gegeben, ebenso eine glatte Funktion $f(x)$, die nicht zu stark anwachsen soll im Unendlichen.

Man kann die Distribution $f \cdot T$ definieren gemäss

$$(f \cdot T, \varphi) \doteq (T, f \cdot \varphi) = \int T(x) f(x)\varphi(x)dx$$

“ f wird also zur Testfunktion geschlagen”.

Beispiel: Was ist $x \cdot \delta(x)$?

$$\int (x\delta(x))\varphi(x)dx = \int \delta(x)(x\varphi(x))dx = (x\varphi(x))|_{x=0} = 0 \quad \forall \varphi \in S.$$

Also:

$$x \cdot \delta(x) = 0 \quad (\text{Nulldistribution})$$

23.8.4 Ableitung von Distributionen

Betrachte zuerst die reguläre Distribution T_f , wobei $f(x)$ aus S sein soll:

$$(T_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx ; \quad \forall \varphi \in S, f \in S \text{ fest}.$$

Analog kann man $T_{f^{(n)}}$ bilden, wobei $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$:

$$(T_{f^{(n)}}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\varphi(x)dx.$$

Betrachte den Fall $n = 1$:

$$(T_{f'}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx.$$

Integriere partiell:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Der Randterm fällt weg, weil f, φ in S sind.

Somit gilt:

$$(T_{f'}, \varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(T_f, \varphi').$$

Ähnlich zeigt man

$$(T_{f^{(n)}}, \varphi) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n (T_f, \varphi^{(n)}).$$

Man hat also die Ableitung auf die Testfunktion φ abgewälzt.

Dieses Resultat erlaubt es nun, Ableitungen von beliebigen (also auch singulären) Distributionen vernünftig zu definieren.

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{(n)}(x)\varphi(x)dx \doteq (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi^{(n)}(x)dx$$

oder in alter Schreibweise

$$T^{(n)}(\varphi) \doteq (-1)^n T(\varphi^{(n)}) .$$

Jede Distribution ist somit (nach Definition) beliebig oft differenzierbar!

Beispiele:

(a) Sei $T(\varphi) = \varphi(0)$. Dann ist

$$T^{(n)}(\varphi) = (-1)^n T(\varphi^{(n)}) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0) .$$

Dasselbe anders geschrieben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx &= \varphi(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx &\doteq (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi^{(n)}(x)dx \\ &= (-1)^n \varphi^{(n)}(0) . \end{aligned}$$

(b) $T(x) = \Theta(x)$. Als gewöhnliche Funktion aufgefasst ist $\Theta(x)$ nicht differenzierbar (da unstetig bei $x = 0$). Als Distribution aufgefasst aber schon:

$$(T_{\Theta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx .$$

(Diese Formelzeile definiert die “ Θ -Distribution”.)

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x)\varphi(x)dx &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\varphi'(x)dx \\ &= (-1) \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = (-1) \varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} \\ &= (-1) \left[\underbrace{\varphi(\infty)}_0 - \varphi(0) \right] = \varphi(0) . \end{aligned}$$

Die Rechnung hat also ergeben, dass

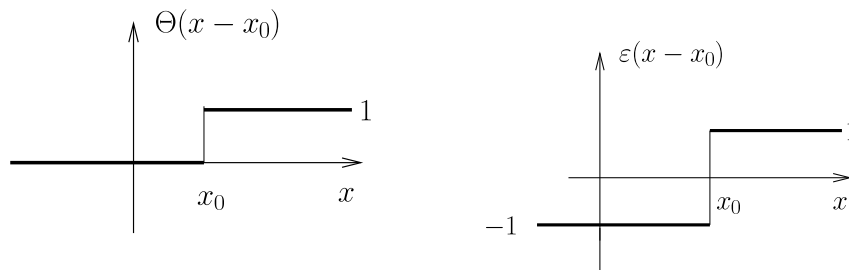
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in S.$$

Somit gilt:

$$\Theta'(x) = \delta(x) \quad (\text{Distributionsgleichung!})$$

In Worten: $\Theta'(x)$ hat dieselbe Wirkung auf eine Testfunktion $\varphi(x)$, wie die δ -Funktion.

Übung:



Bestimme $\frac{d}{dx} \Theta(x - x_0)$ und $\frac{d}{dx} \varepsilon(x - x_0)$.

23.9 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$

$\frac{1}{x}$ ist als Distribution nicht definiert, denn das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$$

hat i.a. ein Problem bei $x = 0$.

Hingegen ist $\frac{1}{x + i\varepsilon}$ definiert als Distribution für $\varepsilon > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx \quad \text{o.k., denn Nenner} \neq 0 \text{ f\"ur } \varepsilon > 0.$$

Man kann zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx$$

einen Sinn macht.

Beweisskizze der Formel in der Überschrift:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\delta} \dots}_{G_1} + \underbrace{\int_{+\delta}^{+\infty} \dots}_{G_2} + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \dots}_{G_3}$$

Wähle $\delta > 0$ fest (d.h. unabhängig von ε), aber klein genug, damit $\varphi(x)$ in G_3 durch $\varphi(0)$ approximiert werden kann.

In den Gebieten G_1 und G_2 kann man den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ vor der Integration ausführen:

$$G_1 + G_2 : \quad \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx .$$

Für das Gebiet G_3 schreiben wir:

$$\begin{aligned} G_3 : \quad \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx &\stackrel{(*)}{\approx} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(0) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(x - i\varepsilon)}{(x + i\varepsilon)(x - i\varepsilon)} \varphi(0) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(x - i\varepsilon)}{(x^2 + \varepsilon^2)} \varphi(0) dx \\ &= \varphi(0) \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx}_{=0, \text{Integrand ungerade}} - i\varphi(0) \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)} dx}_{\arctan(\frac{x}{\varepsilon}) \Big|_{-\delta}^{\delta}} \end{aligned}$$

Also haben wir gefunden:

$$\begin{aligned} G_3 : \quad \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx &\stackrel{(*)}{\approx} -i\varphi(0) \left[\arctan\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \right] \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x + i\varepsilon} \varphi(x) dx &\stackrel{(*)}{\approx} -i\pi\varphi(0) . \end{aligned}$$

Die mit $(*)$ markierten $\approx$ Zeichen werden umso genauer zu einem Gleichheitszeichen, je kleiner man δ macht. Wir machen demzufolge jetzt den limes $\delta \rightarrow 0^+$.

Diesen Limes müssen wir natürlich auch in $G_1 + G_2$ durchführen.

$$G_3 : \quad -i\pi\varphi(0)$$

$$G_1 + G_2 : \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right] \equiv P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$$

Die Summe der Beiträge aus den Gebieten G_1 und G_2 ist exakt das, was man mit dem Hauptwert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$ bezeichnet: P : Principal Value = Hauptwert.

Im Gebiet G_3 wird $\varphi(0)$ produziert: Die δ -Funktion ist also dort am Werk!

Zusammengebaut:

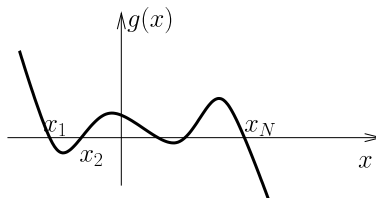
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x).$$

Völlig analog erhält man:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta(x).$$

$$\mathbf{23.10} \quad \delta[g(x)] = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{|g'(x_\nu)|} \delta(x - x_\nu)$$

Die reellen Nullstellen $x_1, \dots, x_N$ der Funktion $g(x)$ seien alle *einfache* Nullstellen.



Wegen der Darstellung von $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ (siehe Ende von Abschnitt 23.6), kann man $\delta[g(x)]$ schreiben als

$$\delta[g(x)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + g^2(x)}.$$

Behauptung:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + g^2(x)} = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{|g'(x_\nu)|} \delta(x - x_\nu) \quad (*)$$

oder gleichwertig

$$\delta[g(x)] = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{|g'(x_\nu)|} \delta(x - x_\nu) \quad (*)$$

Beispiel:

$$g(x) = (x - 2)(3x - 1) = 3x^2 - 7x + 2$$

2 einfache Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = 1/3$.

$$g'(x) = 6x - 7 \Rightarrow g'(x_1) = g'(2) = 5; \quad g'(x_2) = g'(1/3) = -5$$

$$\delta[(x - 2)(3x - 1)] = \frac{1}{5} \delta(x - 2) + \frac{1}{5} \delta(x - 1/3).$$

oder gleichwertig:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[3x^2 - 7x + 2] \varphi(x) dx = \frac{1}{5} \varphi(2) + \frac{1}{5} \varphi(1/3).$$

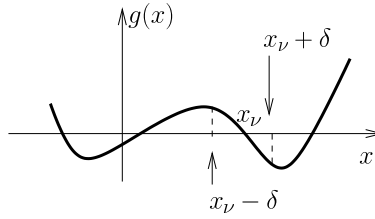
Begründung der Formel (*)

Betrachte den Ausdruck

$$I \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + g^2(x)} \varphi(x); \quad \varphi \in S$$

Nur kleine Intervalle um die Nullstellen herum werden zu I beitragen (in einem Teilintervall, das keine Nullstelle enthält, kann man den Limes $\varepsilon \rightarrow 0^+$ unter das Integral ziehen und erhält Null.)

Spalte Integrationsgebiet auf und betrachte das Teilintervall $[x_\nu - \delta, x_\nu + \delta]$ um die ν -te Nullstelle x_ν . δ sei genügend klein gewählt, so dass dieses Teilintervall keine weitere Nullstelle von g enthält.



Der Beitrag von diesem Teilintervall zu I lautet

$$I_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{x_\nu - \delta}^{x_\nu + \delta} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + g^2(x)} \varphi(x) dx .$$

Führe folgende Substitution durch:

$$t = g(x) , \quad dt = g'(x) dx \rightarrow dx = \frac{dt}{g'(x)}$$

$$I_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} \frac{\varphi(x)}{g'(x)} dt ; \quad (x = g^{-1}(t)) ,$$

wobei

$$t_1 = g(x_\nu - \delta) ; \quad t_2 = g(x_\nu + \delta) .$$

Im vorliegenden Fall ist $t_1 > t_2$ (siehe Zeichnung). Wir schreiben

$$I_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{t_2}^{t_1} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + t^2)} \frac{\varphi(x)}{[-g'(x)]} dt .$$

Mithilfe der in Abschnitt 23.9 gemachten Manipulationen ist es nicht schwierig, den Limes $\varepsilon \rightarrow 0^+$ durchzuführen. Man erhält

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\nu = \frac{\varphi(x_\nu)}{[-g'(x_\nu)]} = \frac{\varphi(x_\nu)}{|g'(x_\nu)|} ,$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen benutzt wurde, dass $g'(x_\nu) < 0$ (siehe Zeichnung).

Also: Die ν -te Nullstelle von $g(x)$ ergibt den folgenden Beitrag zu I :

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{|g'(x_\nu)|}$$

Somit:

$$I = \sum_{\nu=1}^N \frac{\varphi(x_\nu)}{|g'(x_\nu)|}$$

23.11 Fourier-Darstellung der δ -Funktion

Zur Erinnerung: Satz von Fourier

Sei $f(x)$ stückweise glatt und $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ existiere. Dann gilt für $f(x)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad \text{wobei} \\ \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik \cdot 0} \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k).$$

Beachte: Die Funktionen $g(x) \in S$ besitzen Fourierdarstellungen.

Betrachte jetzt die Funktionenfolge

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}.$$

Im Sinne der gewöhnlichen Analysis gilt

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx}.$$

(Denn:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi i x} e^{ikx} \Big|_{k=-n}^{k=n} = \dots = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}.)$$

Betrachte jetzt das Integral $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) g(x)$, wobei $g \in S$.

Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) g(x) = g(0).$$

$\rightarrow \delta_n(x)$ ist demzufolge eine Darstellung der Deltafunktion.

Begründung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta_n(x) g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}}_{\delta_n(x)} g(x) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} g(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ikx} g(x) \stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} g(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{g}(k) e^{ik \cdot 0} = g(0),
\end{aligned}$$

wobei wir in der mit (*) markierten Gleichung die Substitution $k \rightarrow -k$ durchgeführt haben $\square$

Aus der obigen Rechnung sieht man folgendes:

$$g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}.$$

Somit ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ ebenfalls eine Darstellung der δ -Funktion, die sogenannte Fourierdarstellung:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad \text{Fourierdarstellung von } \delta(x)$$

Was ist die Fouriertransformierte $\tilde{\delta}(k)$ von $\delta(x)$? Allgemein gilt: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$. Man kann also sofort ablesen, dass

$$\tilde{\delta}(k) = 1.$$

Bemerkung: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ existiert nicht als Riemannintegral.

Aber der Ausdruck

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} g(x)}_{=g(0)}$$

macht Sinn.

23.12 Die $+$ Distribution

Die bisherige Diskussion legt nahe, dass $\delta(x)$ und $\theta(x)$ die einzigen in der Physik relevanten Distributionen wären. Das ist nicht der Fall! Ein weiteres Beispiel ist gegen über die $+$ Distribution $\frac{1}{(1-x)_+}$ (definiert auf $I = [0, 1]$ statt $I = \mathbb{R}$). Sie wirkt auf eine Testfunktion $\varphi(x)$ als

$$\int_0^1 dx \frac{\varphi(x)}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 dx \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{1-x}, \quad (23.4)$$

und tritt z.B. in der Theorie der Partonverteilungsfunktionen auf.

Konkret beschreibt die Distribution $f_e(x)$ ($x \in [0, 1]$) die Wahrscheinlichkeit, dass der Anteil x des Impulses in einem Elektron von einem Elektron getragen wird. Das Integral über diese Distribution muss deshalb 1 ergeben, damit die Wahrscheinlichkeit erhalten ist

$$\int_0^1 f_e(x) = 1. \quad (23.5)$$

Das Ergebnis für $f_e(x)$ ist

$$f_e(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{s}{m_e^2} \left(\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right). \quad (23.6)$$

Die Physik, die in $f_e(x)$ enthalten ist, geht weit über MMPIII hinaus, aber wir können mit Hilfe der Definition überprüfen, dass die Normierung stimmt:

$$\int_0^1 f_e(x) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{s}{m_e^2} \left[\underbrace{\int_0^1 \frac{1+x^2}{(1-x)_+}}_{*} + \frac{3}{2} \right] = 1, \quad (23.7)$$

denn

$$\begin{aligned} * &= \int_0^1 dx \frac{1+x^2 - (1+x^2)|_{x=1}}{1-x} = \int_0^1 dx \frac{x^2-1}{1-x} \\ &= - \int_0^1 dx (1+x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

24 Die inhomogene Wellengleichung

$$\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) \quad \text{inhomogene Wellengleichung}$$

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{Wellenoperator}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{Laplaceoperator}$$

$f(\vec{x}, t)$ ist als vorgegeben zu betrachten; $F(\vec{x}, t)$ ist die gesuchte Funktion.

Diese Gleichung kommt insbesondere in der Elektrodynamik vor (siehe den folgenden Abschnitt).

24.1 Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen

Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ (2) \quad & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \\ (3) \quad & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (4) \quad & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \end{aligned} \quad (24.1)$$

Die Maxwellgleichungen sind linear. $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ und $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ seien Lösungen von (24.1).

Dann lösen $\vec{E}_3 \doteq \vec{E}_1 - \vec{E}_2$, $\vec{B}_3 \doteq \vec{B}_1 - \vec{B}_2$ die 4 homogenen Gleichungen, die entstehen, wenn man $\rho = \vec{j} = 0$ setzt.

Es gilt:

allg. Lösung der inhomogenen Gl.	=	Partikuläre Lösung der inhomogenen Gl.	+	allg. Lösung der homogenen Gl.
----------------------------------	---	--	---	--------------------------------

Die allg. Lösung der homogenen Gl. wurde sicher in der Elektrodynamikvorlesung diskutiert.

→ Wir brauchen also nur 1 Lösung der inhomogenen Maxwellgleichungen (24.1) zu konstruieren.

Aus den Maxwellgleichungen folgt, dass die $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder (inhomogene) Wellengleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\square \vec{E} &= \vec{f} & ; & & \vec{f} &= - \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \rho + \mu_0 \dot{\vec{j}} \right) \\ \square \vec{B} &= \vec{g} & ; & & \vec{g} &= \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}.\end{aligned}\tag{24.2}$$

Der $\square$ -operator würfelt die Komponenten von $\vec{E}, \vec{B}$ nicht durcheinander. Man hat es also mit einer 6-fachen Kopie der Gleichung $\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)$ zu tun.

Für die Herleitung der Wellengleichungen (24.2) aus den Maxwellgleichungen, siehe ED-Skript.

Annahme: Die Quellen $\vec{j}, \rho$ seien nur in einem beschränkten Raum-Zeit Gebiet $|t| < T, |\vec{x}| < R$ von Null verschieden. Dann gilt:

Satz: Es gibt genau eine Lösung zu $\square \vec{B} = \vec{g}, \square \vec{E} = \vec{f}$, für die die Felder $\vec{E}, \vec{B}$ vor dem Einschalten der Quellen verschwinden, die sogenannte retardierte Lösung:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{f}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \\ \vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{g}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}.\end{aligned}$$

Beweis:

- 1) Integrale verschwinden für $t < -T$, da nach Voraussetzung die Quellen $\vec{f}, \vec{g}$ zu solchen Zeiten verschwinden.
- 2) $\exists$ nur 1 Lösung zu $\vec{E} = \vec{f}$ mit dieser Eigenschaft.

Grund: $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ seien zwei solche Lösungen. $\vec{E}_3 \doteq \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ wäre Lösung der homogenen Wellengleichung. $\vec{E}_3$ verschwindet nach Voraussetzung zum

Zeitpunkt t_0 ($t_0 < -T$). Ebenso $\dot{\vec{E}}_3 = 0$ zu diesem Zeitpunkt: Insgesamt

$$\square \vec{E}_3 = 0 \quad ; \quad \vec{E}_3(\vec{x}, t_0) = \dot{\vec{E}}_3(\vec{x}, t_0) = 0.$$

Diese Anfangsbedingungen legen $\vec{E}_3$ eindeutig fest:

$$\rightarrow \vec{E}_3(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2.$$

3) Die retardierten Felder $\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ erfüllen die Wellengleichung.

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{f}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Zu zeigen ist also:

$$\square \vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \dots = \vec{f}(\vec{x}, t);$$

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Es genügt, $\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)$ zu betrachten, und zu zeigen, dass

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

diese Gleichung löst.

Wir werden die entsprechende Rechnung in Abschnitt 24.3 durchführen.

Zusammengefasst:

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{f}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

$$\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{g}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (24.3)$$

sind die eindeutigen Lösungen der Wellengleichung, welche vor dem Einschalten der Quellen verschwinden.

Übung: Begründe, wieso diese automatisch die Maxwellgleichungen lösen.

24.2 Darstellung via Green'sche Funktion

$\vec{E}_{\text{ret}}$ und $\vec{B}_{\text{ret}}$ können auch dargestellt werden als

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int D_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') d^3x' dt' \vec{f}(\vec{x}', t'),$$

$$\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int D_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') d^3x' dt' \vec{g}(\vec{x}', t').$$

Diese e.m. Felder sind lineare Überlagerungen von Beiträgen, die von den Quellen an verschiedenen Orten und Zeiten produziert werden.

$D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ lautet explizit:

$$D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right).$$

Bemerkung: Der explizite Ausdruck für $D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ führt tatsächlich zu $\vec{E}_{\text{ret}}$, $\vec{B}_{\text{ret}}$ in Gl. (24.3):

$$\begin{aligned} D_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') &= \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right). \\ \rightarrow \vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \int \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) d^3x' dt' \vec{f}(\vec{x}', t'). \end{aligned}$$

Man kann wegen der δ -Funktion sofort über t' integrieren:

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \\ \vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{f}\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Was beschreibt $D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$?

$D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ beschreibt das Wellenfeld, das von einer punktförmigen Quelle erzeugt wird, die am Ort $\vec{x} = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ während sehr kurzer Zeit aufblitzt.

Um dies zu sehen, betrachten wir die erste Komponente $(\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t))_1$ von $\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$, die zur ersten Komponente $f_1(\vec{x}, t)$ der Inhomogenität $\vec{f}(\vec{x}, t)$ gehört, wobei wir

$f_1(\vec{x}, t) = \delta^3(\vec{x}) \delta(t)$ setzen. $f_1(\vec{x}, t)$ stellt die erste Komponente der beschriebenen aufblitzenden Quelle dar.

$$\rightarrow (\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t))_1 = \int D_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \delta^3(\vec{x}') \delta(t') d^3x' dt'$$

$$(\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t))_1 = D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) \quad \square$$

Bemerkung: $(\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t))_1$ erfüllt die DGL

$$\square(\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t))_1 = f_1(\vec{x}, t).$$

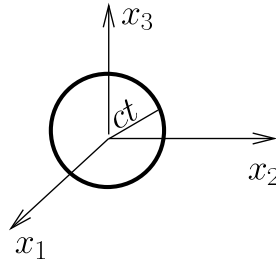
Demzufolge erfüllt $D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$ die DGL

$$\square D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \delta^3(\vec{x}) \delta(t).$$

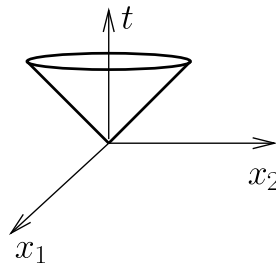
Bildliche Veranschaulichung von $D_{\text{ret}}(\vec{x}, t)$:

$$D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right).$$

Zur Zeit t ist nur gerade im Abstand $|\vec{x}| = ct$ ein Wellensignal vorhanden. $\rightarrow$ Propagation einer zu $t = 0$ bei $\vec{x} = 0$ erzeugten Kugelwelle.



Andere Darstellung: ("4-dim" Bild)



$D_{\text{ret}} \neq 0$ nur auf Vorwärtslichtkegel

24.3 Verifikation, dass $\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)$

Wie oben angekündigt, wollen wir jetzt zeigen, dass

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

die DGL $\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t)$ tatsächlich erfüllt.

Es ist günstig, die folgende Substitution durchzuführen:

$$\begin{aligned} \vec{y} = \vec{x} + \vec{z} &\rightarrow d^3y = d^3z \\ \rightarrow F(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3z}{|\vec{z}|} f\left(\vec{x} + \vec{z}, t - \frac{|\vec{z}|}{c}\right). \end{aligned}$$

$\frac{1}{|\vec{z}|}$ wird nicht zu Problemen führen. Trotzdem sparen wir eine Kugel K_ε vom Radius ε um $\vec{z} = 0$ aus im Integral (und lassen $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen am Schluss).

Wir betrachten jetzt also

$$F_\varepsilon(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\varepsilon} \frac{d^3z}{z} f\left(\vec{x} + \vec{z}, t - \frac{z}{c}\right); \quad z \doteq |\vec{z}|$$

und bilden $\square F_\varepsilon$:

$$\square F_\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int_{z \geq \varepsilon} d^3z I,$$

wobei

$$I = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{c^2} \ddot{f} - \Delta_x f \right]. \quad (24.4)$$

Wir versuchen nun, die partiellen Ableitungen nach $\vec{x}$ durch solche nach $\vec{z}$ auszudrücken:

$$\vec{\nabla}_z f = \vec{\nabla}_x f + \dot{f} \frac{(-1)}{c} \underbrace{\vec{\nabla}_z(z)}_{\vec{z}} = \vec{\nabla}_x f - \frac{1}{c} \frac{\vec{z}}{z} \dot{f}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_x f = \vec{\nabla}_z f + \frac{1}{c} \frac{\vec{z}}{z} \dot{f} \quad \text{oder} \quad \vec{\nabla}_x = \vec{\nabla}_z + \frac{1}{c} \frac{\vec{z}}{z} \frac{\partial}{\partial t}$$

$\Delta_x f$ wird dann (Übung!):

$$\Delta_x f = \vec{\nabla}_x \cdot \vec{\nabla}_x f = \dots = \Delta_z f + \frac{2}{c} \frac{1}{z} \dot{f} + \frac{2}{c} \frac{\vec{z}}{z} \vec{\nabla}_z f + \frac{1}{c^2} \ddot{f}.$$

Setze nun diesen Ausdruck für $\Delta_x f$ in Gl. (24.4) ein:

$$I = -\frac{1}{z}\Delta_z f - \frac{2}{c}\frac{1}{z^2}\dot{f} - \frac{2}{c}\frac{\vec{z}}{z^2}\vec{\nabla}_z \dot{f}. \quad (24.5)$$

Behauptung: I kann als Divergenz geschrieben werden:

$$I = \vec{\nabla}_z \cdot \left\{ -\frac{1}{z}\vec{\nabla}_z f - \frac{\vec{z}}{z^3}f - \frac{2}{c}\frac{\vec{z}}{z^2}\dot{f} \right\}. \quad (24.6)$$

Übung: Zeige, dass dieser Ausdruck mit demjenigen in Gl. (24.5) übereinstimmt.

Somit:

$$\square F_\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int_{z \geq \varepsilon} d^3 z \vec{\nabla}_z \cdot \left\{ -\frac{1}{z}\vec{\nabla}_z f - \frac{\vec{z}}{z^3}f - \frac{2}{c}\frac{\vec{z}}{z^2}\dot{f} \right\}.$$

Wir haben also ein Volumenintegral über eine Divergenz zu berechnen. Mithilfe des Satzes von Gauss können wir dieses in ein Oberflächenintegral über den Rand des Volumens umwandeln.

Der Rand im Unendlichen liefert keinen Beitrag, da nach Voraussetzung f (und somit auch $\dot{f}$) dort verschwinden.

Es bleibt nur der Beitrag vom Rand der kleinen Kugel K_ε :

$$\square F_\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \oint_{z=\varepsilon} d\vec{\sigma} \cdot \left\{ \frac{1}{z}\vec{\nabla}_z f + \frac{\vec{z}}{z^3}f + \frac{2}{c}\frac{\vec{z}}{z^2}\dot{f} \right\}.$$

$d\vec{\sigma}$ ist nach aussen gerichtet (bezüglich der kleinen Kugel, deshalb der Vorzeichenwechsel).

ε klein machen: Dann kann man f , $\dot{f}$ und $\vec{\nabla} f$ bei $\vec{z} = 0$ auswerten.

Die Kugeloberfläche ist $\sim \varepsilon^2$. Der 1. und 3. Term in der geschweiften Klammer verhalten sich wie $\sim 1/\varepsilon$, während sich der 2. Term wie $1/\varepsilon^2$ verhält.

$\Rightarrow$ Nur der 2. Term überlebt im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\square F_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi} \oint_{z=\varepsilon} d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{z}}{z^3} f|_{\vec{z}=0} = \dots = \frac{1}{4\pi} 4\pi f|_{\vec{z}=0} = f(\vec{x} + \vec{z}, t - \frac{z}{c})|_{\vec{z}=0} = f(\vec{x}, t).$$

D.h., es gilt

$$\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t).$$

Zusammengefasst:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

erfüllt tatsächlich die Wellengleichung

$$\square F(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) .$$

23 Komplexe Analysis

Reelle Analysis $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Komplexe Analysis $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ("Funktionen-Theorie")

23.1 Komplexe Differenzierbarkeit

reell differenzierbar:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst reell differenzierbar am Punkt x falls die folgenden Grenzwerte existieren und übereinstimmen:

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x - \epsilon) - f(x)}{-\epsilon} \quad (23.1)$$

komplex differenzierbar:

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar am Punkt z falls der Grenzwert:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} \quad (23.2)$$

existiert und unabhängig von der Richtung von δz ist. (unabhängig $\arg(\delta z)$, $\delta z = |\delta z|e^{i \arg(\delta z)}$)

Notwendige Bedingung

Betrachte $z = x + iy$, $f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$

(i) $\delta z = \delta x$:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \delta x, y) + iv(x + \delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \quad (23.3)$$

(ii) $\delta z = i\delta y$:

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \delta y) + iv(x, y + \delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\delta y} = \frac{\delta u}{i\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \quad (23.4)$$

$$\rightarrow (i) = (ii) \Rightarrow \boxed{\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}} \quad \underline{\text{Cauchy-Riemann DGL}} \quad (23.5)$$

Auch hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned} \delta f &= f(z + \delta z) - f(z) = u(x + \delta x, y + \delta y) + iv(x + \delta x, y + \delta y) - u(x, y) - iv(x, y) \\ &= \delta x \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) + \delta y \left(\underbrace{\frac{\delta u}{\delta y}}_{-\frac{\delta v}{\delta x}} + i \underbrace{\frac{\delta v}{\delta y}}_{\frac{\delta u}{\delta x}} \right) + O(\delta^2) \\ &= \frac{\delta u}{\delta x}(\delta x + i\delta y) + i \frac{\delta v}{\delta x}(\delta x + i\delta y) + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (23.6)$$

$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} + O(\delta)$ ist unabhängig von der Richtung δz !

Definition:

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst analytisch oder holomorph oder regulär falls $f(z) \quad \forall \quad z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

f heisst ganze Funktion falls sie holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

Satz: Die Ableitung einer holomorphen Funktion ist wieder holomorph!

Beweis später über Cauchy Intergralformel

Bsp:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \underbrace{2xy}_v$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -2y = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$f(z) = |z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x \quad \frac{\delta u}{\delta y} = 2y \quad \frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \Rightarrow |z|^2 \text{ ist nur holomorph bei } z = 0$$

$$f(z) = z^* = x - iy$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = +1 \neq -1 = \frac{\delta v}{\delta y} \Rightarrow \text{nicht komplex differenzierbar}$$

Satz:

Falls $f(z)$ holomorph ist, kann man für die Berechnung der Ableitung die Richtung frei wählen $\rightarrow$ funktioniert ähnlich wie beim reellen Ableiten

Jede konstante Funktion ist holomorph mit Ableitung 0:

$$\frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{c - c}{\delta z} = 0 \quad (23.7)$$

Die lineare Funktion $f(z) = z$ ist holomorph mit Ableitung 1:

$$\frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{z + \delta z - z}{\delta z} = 1 \quad (23.8)$$

Summenregel:

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad (23.9)$$

$$\begin{aligned} (f + g)(z + \delta z) - (f + g)(z) &= f(z + \delta z) - f(z) + g(z + \delta z) - g(z) \\ & \quad (23.10) \end{aligned}$$

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad (23.11)$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(z + \delta z) - (fg)(z) &= f(z + \delta z)g(z + \delta z) - f(z)g(z) \\ &= [f(z + \delta z) - f(z)]g(z + \delta z) + [g(z + \delta z) - g(z)]f(z) \\ & \quad (23.12) \end{aligned}$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (23.13)$$

Kettenregel:

$$f(g(z)) = f'(g(z)) \cdot g'(z) \quad (23.14)$$

Weitere Rechenregeln

$$f(z) = \underbrace{z^n}_{=z \cdot z^{n-1}} \quad n \in \mathbb{N} \quad (23.15)$$

$$f'(z) = 1 \cdot z^{n-1} + z \frac{d}{dz} \underbrace{z^{n-1}}_{=z \cdot z^{n-2}} = z^{n-1} + z(z^{n-2} + z \frac{d}{dz} z^{n-2}) \quad (23.16)$$

Induktion nach n :

$$\Rightarrow = nz^{n-1}$$

$\Rightarrow$ Jedes Polynom $P_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ist eine ganze Funktion

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad \text{rationale Funktionen}$$

$\Rightarrow$ ist holomorph ausser an der Nullstellen von $Q_m(z)$

$\frac{1}{z}$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Ableitung $-\frac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (23.17)$$

$$\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (23.18)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\delta v}{\delta x} \quad (23.19)$$

Interpretation der komplexen Ableitung

(1) reelle Ableitung $\rightarrow$ lokale Eigenschaft
 komplexe Ableitung $\rightarrow$ Laplace Gleichung in 2D

Cauchy-Riemann DGL:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \xrightarrow{\frac{\delta}{\delta x}} \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x} \xrightarrow{\frac{\delta}{\delta y}} \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} \quad (23.20)$$

$$\text{addieren} \rightarrow \left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) u = \Delta u = 0$$

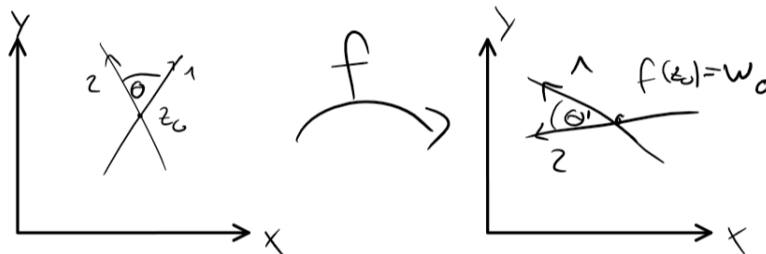
genau gleich für v (oder argumentieren: falls f holomorph dann auch $-if = v - iu$)

$\rightarrow u, v$ heissen harmonische Funktionen (u, v sodass Laplace Operator = 0)

(2) geometrische Bedeutung

$$f(z) = w \quad \text{in der Nähe von } z_0$$

Was ist die Beziehung zwischen $\theta = \theta_{1,2}$ $\theta' = \theta_{1',2'}$?



$$\delta w = \delta u + i\delta v = f(z_0 + \delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\delta z + O(\delta z^2) \quad (23.21)$$

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \lambda O, \quad (23.22)$$

mit $f'(z_0) = \lambda e^{i\phi}$ und einer orthogonalen Matrix O .

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\vec{x}'^T \vec{y}'}{|\vec{x}'| |\vec{y}'|} \stackrel{*}{=} \frac{\lambda^2 \vec{x}^T O^T O \vec{y}}{\lambda \sqrt{\vec{x}^T O^T O \vec{x}} \sqrt{\vec{y}^T O^T O \vec{y}}} \\ * &= \quad \vec{x}' = A \vec{x} \quad \vec{y}' = A \vec{y} \quad \text{mit } A = \lambda O \\ &= \quad \frac{\vec{x}^T \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \cos \theta \end{aligned} \quad (23.23)$$

→ Die durch $f(z)$ definierte lineare Transformation ist winkeltreu

Wenn $f'(z_0) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung von $w_0 = f(z_0)$, in der die Inverse Funktion f^{-1} existiert, wieder analytisch ist, mit $f'(z_0)^{-1} = \frac{1}{f'(z_0)}$
Denn: $f'(z_0) \neq 0 \rightarrow A = \lambda \cdot O$, A invertierbar $A^{-1} = \lambda^{-1} \cdot O^T$
 $\rightarrow \delta_w = f'(z_0) \delta_z + O(\delta^2)$

Satz: Für eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) f ist in z_0 komplex differenzierbar

(ii) f ist in z_0 reell differenzierbar und $\frac{\delta f}{\delta z^*}(z_0) = 0$

Beweis:

(i) $\rightarrow$ (ii):

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i} \quad (23.24)$$

Kettenregel:

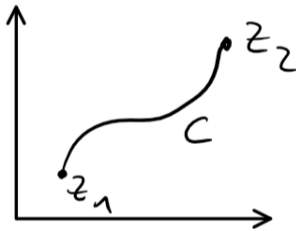
$$\frac{\delta f}{\delta z^*} = \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta z^*} + \frac{\delta f}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} + i \frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta y} \right) \stackrel{\text{CR-DGL}}{=} 0 \quad (23.25)$$

(ii) $\rightarrow$ (i) über ähnliche Argumente

Beispiele: holomorphe Funktionen: Polynome, rationale Funktionen

23.2 Cauchy Integralformel

Kurvenintegrale/Linienintegrale/Konturintegrale



$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 dt f(y(t)) \dot{y}(t)$$

$\rightarrow$ definiert wie in MMPII

23.2.1 Satz von Cauchy

Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und C sei eine geschlossene Kurve in Ω , dann gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (23.26)$$

Bemerkung/Definitionen:

Ω heisst einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in Ω stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann $\rightarrow$ “keine Löcher”

$\oint_C$ soll andeuten, dass die Integration über eine geschlossene Kurve ist.

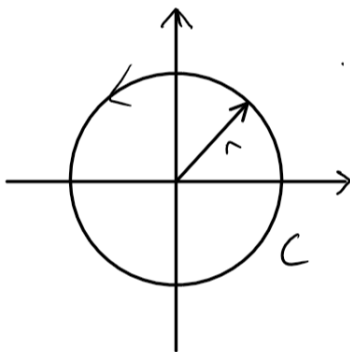
Der Satz von Cauchy ist der wichtigste in dieser Vorlesung, da die gesamte



Funktionentheorie darauf aufbaut.

Beispiele

1)



$$f(z) = z^n \Rightarrow \oint_C z^n dz$$

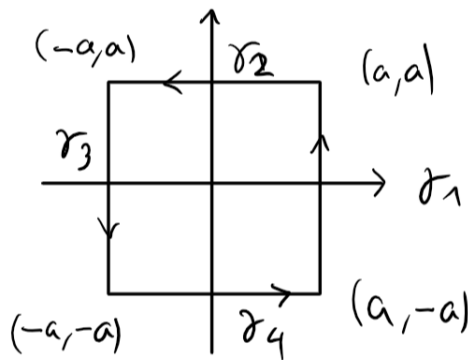
mit $z = re^{i\phi}$ $\phi \in [0, 2\pi]$ und $\frac{dz}{d\phi} = ire^{i\phi}$ erhält man

$$= ir \int_0^{2\pi} r^n e^{i(n+1)\phi} d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\phi} \Big|_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \\ ir^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Cauchy sagt: $\oint_C z^n dz = 0$ für $n \geq 0$
keine Aussage für $n < 0$

2)



$$\gamma_1(t) = a((1-i)(1-t) + (1+i)t)$$

$$\gamma_2(t) = a((1+i)(1-t) + (-1+i)t)$$

$$\gamma_3(t) = a((-1+i)(1-t) + (-1-i)t)$$

$$\gamma_4(t) = a((-1-i)(1-t) + (1-i)t) \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

wieder $f(z) = z^n$:

$$\oint_C z^n dz = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 dt (\gamma_i(t))^n \frac{d\gamma_i(t)}{dt}$$

$n \neq -1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \frac{(\gamma_i(t))^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^4 \left[(\gamma_i(1))^{n+1} - (\gamma_i(0))^{n+1} \right] \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} \left[\underbrace{(1+i)^{n+1} - (1-i)^{n+1}}_{\gamma_1} + \underbrace{(-1+i)^{n+1} - (1+i)^{n+1}}_{\gamma_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(-1-i)^{n+1} - (-1+i)^{n+1}}_{\gamma_3} + \underbrace{(1-i)^{n+1} - (-1-i)^{n+1}}_{\gamma_4} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$n = -1$:

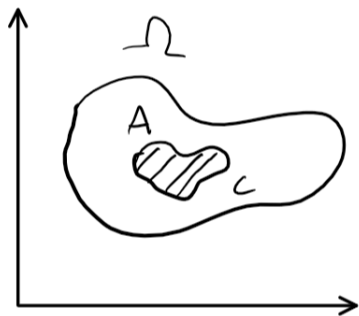
$$\begin{aligned}
\oint_C dz z^{-1} &= \sum_{i=1}^4 \int_0^1 dt \frac{\frac{d\gamma_i}{dt}}{\gamma_i(t)} \\
&= \int_0^1 dt \left(\frac{2i}{1-i+2it} - \frac{2}{1+i-2t} - \frac{2i}{-1+i-2it} + \frac{2}{-1-i+2t} \right) \\
&= \int_0^1 dt \left(\frac{4i}{1-i+2it} - \frac{4}{1+i-2t} \right) = \int_0^1 dt \left(\frac{4i(1+i-2it)}{1+(2t-1)^2} - \frac{4(1-i-2t)}{(1-2t)^2+1} \right) \\
&= 4 \int_0^1 dt \frac{i-1+2t-1+i+2t}{1+(2t-1)^2} = 4 \int_0^1 dt \frac{2i+2(2t-1)}{1+(2t-1)^2} \quad (23.27)
\end{aligned}$$

Transformation $2t-1 \xrightarrow{t \rightarrow 1-t} -(2t-1)$, dies ist ungerade, verschwindet also

$$= 8i \int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)^2} = 8i \left[\frac{1}{2} \arctan(2t-1) \right]_0^1 = 4i \left(\underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} - \underbrace{\arctan(-1)}_{-\pi/4} \right) = 2\pi i$$

→ gleiches Ergebnis wie beim Kreis

Beweis Satz von Cauchy



- Ω einfach zusammenhängend
- $f(z)$ holomorph
- C geschlossen in Ω

zu zeigen: $\oint_C f(z) dz = 0$

Wir nehmen zunächst an, dass die partiellen Ableitungen von u, v stetig sind (voller Beweis ohne dies Annahme Goursat 1900, siehe unten)

Beweisidee hier erfolgt über den Satz von Stokes

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \underbrace{\oint_C (u dx - v dy)}_{\text{Re: } \textcircled{1}} + i \underbrace{\oint_C (v dx + u dy)}_{\text{Im: } \textcircled{2}} \quad (23.28)$$

Behauptung: $\textcircled{1} = \textcircled{2} = 0$

Schreibe Integranden wie im Satz von Stokes:

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{w} = \int_A d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}), \quad (23.29)$$

also in der Form $(v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) \cdot d\vec{l}$

Dann folgt aus dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} (v_x dx + v_y dy) &= \oint_{\mathcal{C}} (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{\nabla} \times (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\vec{e}_z dx dy} \\
&= \int_A dy dx \vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla} \times v_x \vec{e}_x + \vec{\nabla} \times v_y \vec{e}_y) \\
&= \int_A dx dy \left(\frac{\delta}{\delta x} v_y - \frac{\delta}{\delta y} v_x \right) \quad (23.30)
\end{aligned}$$

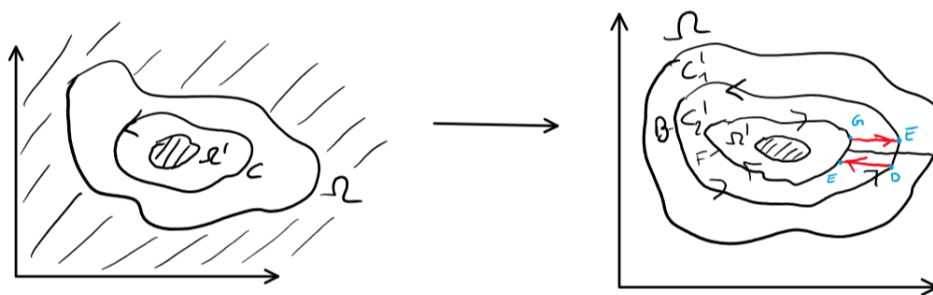
Nun Anwendung auf $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$

$$\textcircled{1} \quad \begin{matrix} v_x \equiv u \\ v_y \equiv -v \end{matrix} \int_A dx dy \left(-\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right) = 0 \quad \text{CR-DGL} \quad (23.31)$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{matrix} v_x \equiv v \\ v_y \equiv u \end{matrix} \int_A dx dy \left(\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta v}{\delta y} \right) = 0 \quad \text{CR-DGL} \quad \square \quad (23.32)$$

Erweiterung auf nicht einfach zusammenhängende Gebiete:

$f(z)$ sei holomorph in Ω aber nicht in $\Omega' \rightarrow$ Satz von Cauchy gilt gerade nicht für $\mathcal{C}$



$\mathcal{C}' = \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2$ lässt sich zusammenziehen, also $\oint_{\mathcal{C}'} f(z) dz = 0$ (Singularität umgehen)

$$\int_{GA} f(z) dz + \int_{ABD} f(z) dz + \int_{DE} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz \quad (23.33)$$

$f(z)$ ist stetig auf GA, ED , insbesondere für $G \rightarrow E, A \rightarrow D$

$$\int_{GA} f(z)dz = - \int_{DE} f(z)dz \quad (23.34)$$

$$\text{also } \oint_{C'} f(z)dz = \oint_{C'_1} f(z)dz + \oint_{C'_2} f(z)dz \longrightarrow \oint_{C'_1} f(z)dz = - \oint_{C'_2} f(z)dz \quad (23.35)$$

Integral bleibt also unverändert, bei stetiger Deformation der Kontur innerhalb der Region, in der $f(z)$ holomorph ist.

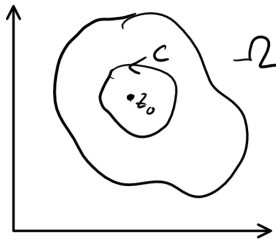
→ Deshalb waren die Ergebnisse für die Beispiele 1) und 2) identisch auch für $n < 0$

23.2.2 Cauchy Integralformel

Sei $f(z)$ holomorph, entlang der geschlossenen Kurve C (in Ω)

Dann gilt für jedes $z_0 \in \Omega$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (23.36)$$



Beispiele:

$$1) \oint_C dz \frac{1}{z(z+2)} = \oint_C dz \frac{\frac{1}{z+2}}{z-0}$$

hier: $f(z) = \frac{1}{z+2}$, $\mathcal{C}$ Einheitskreis

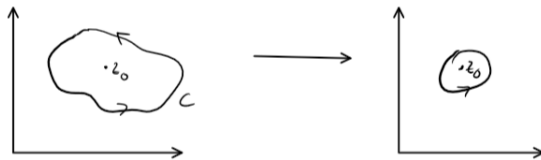
nur Nullstellen innerhalb der Kontur sind relevant ($z = -2$ spielt keine Rolle)

$$= 2\pi i \frac{1}{z_0 + 2} \Big|_{z_0=0} = \pi i$$

$$2) \oint_C dz \frac{1}{4z^2 - 1} \stackrel{\text{Partialbruch}}{\stackrel{=}{\text{Zerlegung}}} \frac{1}{4} \oint \left(\frac{1}{z - 1/2} - \frac{1}{z + 1/2} \right) = \frac{1}{4} 2\pi i \left(f(z_0)|_{z_0=1/2} - f(z_0)|_{z_0=-1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} 2\pi i (1 - 1) = 0$$

Beweis Cauchy Integralformel



$$z = z_0 + re^{i\phi}, \quad r \rightarrow 0$$

$$\frac{dz}{d\phi} = ire^{i\phi}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{ir}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{i\phi} f(z_0 + re^{i\phi})}{re^{i\phi}} \quad (23.37)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f(z_0 + re^{i\phi}) \quad (23.38)$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(z_0) \int_0^{2\pi} d\phi = f(z_0) \quad (23.39)$$

Anwendung

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (23.40)$$

durch naives Vertauschen von Integration und Differentiation:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (23.41)$$

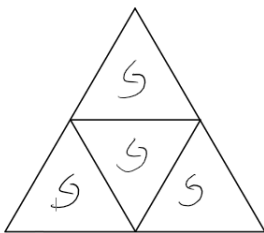
Dieses Vorgehen ist legitim, erfordert aber die Version des Satzes von Cauchy nach Goursat (ohne die Annahmen an die Stetigkeit der partiellen Ableitungen)

Satz: Die Ableitung einer holomorph Funktion ist wieder holomorph.

23.2.3 Beweis (-skizze) nach Goursat

Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$. Dann gilt für jede, in einer Umgebung von Δ , holomorphe Funktion $f : \oint_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$

Skizze:



Unterteilung in der Mitte, Integration über die Wege hebt sich weg

$$\rightarrow \left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \oint_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \quad \text{o.B.d.A. sei } \Delta_1 \text{ der grösste Term} \quad (23.42)$$

$$\rightarrow \text{Konstruiere Folge } \Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \quad (23.43)$$

mit

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \quad \text{und} \quad L(\partial \Delta_n) = 2^{-n} L(\partial \Delta) \quad (23.44)$$

Da alle Δ_n kompakt: $\bigcap_{n \geq 0} \Delta_n = \{z_0\}$

f differenzierbar in z_0 : $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + A(z))$ mit $A(z) \rightarrow 0$
für $z \rightarrow z_0$

$$\oint_{\partial \Delta_n} dz [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] = 0 \quad (\text{Stammfunktion und geschlossener Integrationsweg}) \quad (23.45)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0) A(z) dz \right| \leq L(\partial \Delta_n) \max_{z \in \partial \Delta_n} |(z - z_0) A(z)| \\ &\leq [L(\partial \Delta_n)]^2 \max_{z \in \partial \Delta_n} |A(z)| \end{aligned} \quad (23.46)$$

$$\rightarrow \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n (L(\partial \Delta) 2^{-n})^2 \max_{z \in \partial \Delta_n} |A(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (L(\partial \Delta))^2 |A(z_0)| = 0 \quad (23.47)$$

Dies beweist den Satz für ein Dreieck, kompliziertere Gebiete können dann darauf zurückgeführt werden.

23.2.4 Stammfunktion

Definition:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, stetig. Eine Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heisst Stammfunktion von f , wenn F holomorph ist mit $F' = f$.

f hat lokale Stammfunktion auf Ω , falls es zu jedem $z \in \Omega$ eine Umgebung Ω' ($z \in \Omega' \subset \Omega$) gibt, sodass f auf Ω' eine Stammfunktion hat.

Satz:

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit Stammfunktion F , γ ein Integrationsweg in Ω , von z_0 nach z_1 . Dann ist $\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$

Bemerkung: Für holomorphe Funktion folgt dies direkt aus dem Satz von Cauchy, da das Ergebnis nicht vom Weg abhängt.

Satz:

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit lokaler Stammfunktion F . Dann ist f holomorph.

Denn: Nach Voraussetzung ist F holomorph. Dann ist auch f holomorph.

23.2.5 Satz von Morera

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$ für jede geschlossene Kurve in Ω , dann ist f holomorph.

Beweis:

Betrachte $z \in \Omega, a \in \Omega$ fest, und definiere $F(z) = \int_a^z f(z)dz$, was wegen $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$ nicht von dem gewählten Pfad abhängt.

Zeige: $F(z)$ ist eine Stammfunktion

Betrachte:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(z+\epsilon) - F(z)}{\epsilon} - f(z) \right| &= \frac{1}{\epsilon} \left| \int_z^{z+\epsilon} dz' (f(z') - f(z)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\max_{z' \in [z, z+\epsilon]} |f(z') - f(z)|}_{\text{entlang des Weges von } z \text{ nach } z+\epsilon} \\
 &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{da } f(z) \text{ stetig ist} \quad \square \quad (23.48)
 \end{aligned}$$

23.3 Potenzreihen

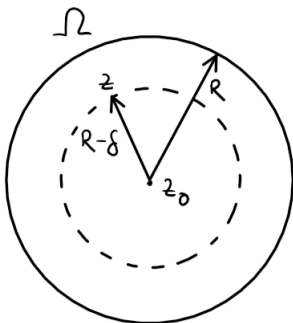
Wir betrachten als nächstes Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, um höhere Funktionen wie $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ einführen zu können.

23.3.1 Cauchysche Ungleichung

Sei f in einer Umgebung von $\Omega = \{z \mid |z - z_0| \leq R\}$ holomorph.

Dann gilt für jedes $0 < \delta \leq R$ und $|z - z_0| \leq R - \delta$:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{R}{\delta} \frac{n!}{\delta^n} \max_{|z' - z_0| = R} |f(z')| \quad (23.49)$$



z.B. für $\delta = R$ ist $z = z_0 \rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{|z' - z_0| = R} |f(z')|$

$$\text{für } \delta = \frac{R}{2} \rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq 2^{n+1} \frac{n!}{R^n} \max_{|z'-z_0|=R} |f(z')| \quad (23.50)$$

Beweis: Cauchy Integralformel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\delta\Omega} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz' \quad \text{für } |z - z_0| < R \quad (23.51)$$

$$\text{Sei } |z - z_0| \leq R - \delta \rightarrow |z' - z| \geq \delta \rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi R \frac{1}{\delta^{n+1}} \max_{|z'-z_0|=R} |f(z)|. \quad \square$$

23.3.2 Weierstrassscher Konvergenzsatz

Die Folge holomorpher Funktionen f_n konvergiere lokal gleichmässig auf Ω gegen f . Dann ist f holomorph, und alle Ableitungen von f_n konvergieren lokal gleichmässig gegen die Ableitung von f .

[Anwendung: $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$]

lokal gleichmässig: $\forall z_0 \in \Omega$ und $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ wenn $|z - z_0| < \delta$ und $n > n_0$

Beweis: Als lokal gleichmässiger Limes stetiger Funktionen ist f stetig. Sei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve in Ω

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz \stackrel[\text{Konvergenz}]{\text{gleichmässige}} \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{C}} f_n(z) dz = 0 \quad (23.52)$$

Satz von Morera $\rightarrow f$ holomorph

Ableitungen: Sei $z_0 \in \Omega$, $\epsilon > 0$. Nach Cauchy Ungleichung angewendet auf $f - f_n$, mit $\delta = R/2$:

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{4}{R} \max_{|z'-z_0|=R} |f(z') - f_n(z')| \quad (23.53)$$

für ein R , so dass die Kreisscheibe in Ω liegt.

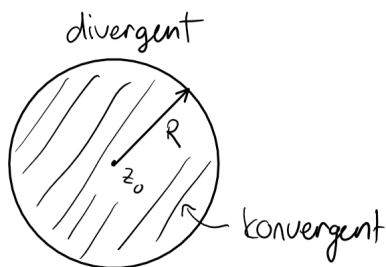
Da f_n lokale gleichmässig konvergiert: wähle n_0 so gross, dass

$$\max_{|z'-z|=R} |f(z') - f_n(z')| < \frac{R}{4}\epsilon$$

$$\rightarrow |f'_n(z) - f'(z)| < \epsilon \quad \square$$

$\rightarrow$ Der Weierstrassscher Konvergenzsatz ist eine Folgerung aus dem Satz von Morera und der Cauchy Ungleichung.

Nun Anwendung auf Potenzreihen: $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$



Folgerung aus Weierstrass:

Innerhalb des Konvergenzradius $|z - z_0| < R$ ist die Potenzreihe $f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^n$ holomorph und darf gliedweise differenziert werden (Konvergenzradius bleibt erhalten)

Begründung: betrachte

$$\rho_k(z) = \frac{|a_{k+1}||z - z_0|^{k+1}}{|a_k||z - z_0|^k} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|z - z_0| \quad (23.54)$$

mit $\rho(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(z)$ falls der Limes existiert.

Für $\rho(z) < 1$ ist die Reihe absolut konvergent, denn für $n > n_0$ (für das $\rho_n < \delta < 1$):

$$\begin{aligned} |a_{n+1}||z - z_0|^{n+1} &= \rho_n |a_n||z - z_0|^n \\ &= \rho_n \rho_{n-1} |a_{n-1}||z - z_0|^{n-1} \\ &\dots \\ &\leq \delta^{n+1-n_0} |a_{n_0}||z - z_0|^{n_0} \end{aligned} \quad (23.55)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1}||z - z_0|^{n+1} &\leq |a_{n_0}||z - z_0|^{n_0} \delta \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} \delta^{n-n_0}}_{\text{konvergent für } 0 < \delta < 1} \end{aligned} \quad (23.56)$$

→ Der Konvergenzradius folgt aus dem Grenzfall $\rho(z) = 1$, also

$$\begin{aligned}
 R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\
 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{holomorph für } |z - z_0| < R \\
 f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}
 \end{aligned} \tag{23.57}$$

23.3.3 Eulersche Funktion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{definiert eine holomorphe Funktion auf ganz } \mathbb{C}! \quad (\text{ganze Funktion})$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \tag{23.58}$$

darf gliedweise differenzieren:

$$\begin{aligned}
 (e^z)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \\
 e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} ?
 \end{aligned} \tag{23.59}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^{-z} e^{w+z} \quad z, w \in \mathbb{C} \\
 f'(z) &= -e^{-z} e^{w+z} + e^{-z} e^{w+z} = 0 \\
 &\rightarrow e^{-z} e^{w+z} = \text{Konstante}(w) \text{ auf } \mathbb{C} \\
 \text{Für } z = 0 : \quad e^w &= \text{Konstante}(w) \rightarrow e^{-z} e^{w+z} = e^w \\
 \text{Für } w = 0 : \quad e^{-z} e^z &= 1 \rightarrow e^{w+z} = e^w e^z
 \end{aligned}$$

→ $\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ sind ebenfalls ganze Funktionen, können auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden.

23.3.4 Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion ist nicht eindeutig, denn

$$e^{x+2\pi in} = e^x e^{2\pi in} = e^x = y \rightarrow " \log y " = x + 2\pi in \quad (23.60)$$

→ Ambiguität durch Wahl von n

$n_0 = 0$: "Hauptzweig" → siehe später



$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$
sodass $\Omega' = \{z \mid |z - z_0| < R\} \subset \Omega$

Für $z \in \Omega'$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega'} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad (23.61)$$

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{z - z_0}{z' - z_0}}_{\text{hat Betrag} < 1 \text{ denn } z \in \Omega', z' \in \partial\Omega'}} \frac{1}{z' - z_0} \quad (23.62)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (23.63)$$

$$(23.64)$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega'} dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad (23.65)$$

gleichmässige Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega'} dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n}_{\equiv a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} \quad (23.66)$$

$$\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für } |z - z_0| < R \quad (23.67)$$

Satz: Eine auf Ω holomorphe Funktion ist um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ in einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickelbar, mit Koeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega'} dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}$, wobei der Konvergenzradius R gegeben ist als der grösste Kreis um z_0 , der in Ω liegt, und Ω' ist eine Kreisscheibe mit Radius $r < R$ um z_0 .

Es gilt sogar die Äquivalenz der folgenden Aussagen ($f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$)

- (i) f ist holomorph
- (ii) f besitzt lokale Stammfunktionen
- (iii) f ist reell differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemann DGL
- (iv) f ist um jedes $z_0 \in \Omega$ in einer Potenzreihe entwickelbar

23.3.5 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Folgende Aussagen sind für zwei holomorphe Funktionen f, g äquivalent ($f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \Omega$ einfach zusammenhängend) :

- (i) $f = g$
- (ii) Es gibt ein $z_0 \in \Omega$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \forall n$
- (iii) Es gibt eine nicht diskrete Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega'$

nicht diskret $\equiv$ Menge mit Häufungspunkt, Beispiele:

$$[a, b], \quad x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \quad (23.68)$$

$\rightarrow$ Häufungspunkt 0

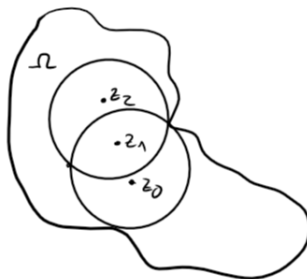
Beweis:

(ii) $\rightarrow$ (i) Innerhalb des Konvergenzradius um z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n \quad (23.69)$$

(da $f_n = g_n$)

$$f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z - z_0)^n \quad (23.70)$$



$\rightarrow$ analytische Fortsetzung durch Potenzreihenentwicklung

(iii) $\rightarrow$ (ii) Ω' ist nicht diskret, d.h., wir können eine Folge definieren $z_n \in \Omega'$ ($z_n \neq z_0$)

$$z_n \rightarrow z_0$$

$$f(z_n) = g(z_n), [f(z_0) = g(z_0) \text{ wegen Stetigkeit}] \quad (23.71)$$

Zeige, dass die Ableitung in z_0 übereinstimmt, betrachte dazu:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n \\
g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z - z_0)^n \\
f_0 &= g_0
\end{aligned} \tag{23.72}$$

und zeige über vollständige Induktion: $f_k = g_k \quad \forall k$

$f_k = g_k$ sei schon gezeigt für $k < m$

$$\rightarrow f(z) - g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} (f_k - g_k)(z - z_0)^k \tag{23.73}$$

Auswertung bei $z = z_n$ ($f(z_n) = g(z_n)$):

$$0 = \sum_{k=m}^{\infty} (f_k - g_k)(z_n - z_0)^k \quad | \div (z_n - z_0)^m \tag{23.74}$$

$$\rightarrow = f_m - g_m + (z_n - z_0) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (f_{m+1+k} - g_{m+1+k})(z_n - z_0)^k}_{k(z_n)} \tag{23.75}$$

$k(z_n)$ ist stetig (sogar holmorph)

$n \rightarrow \infty$:

$$0 = f_m - g_m \quad \rightarrow f_m = g_m \quad \square \tag{23.76}$$

Konsequenz:

Eine holomorphe Funktion ist schon durch eine sehr kleine Teilmenge eindeutig bestimmt $\rightarrow$ analytische Fortsetzung

Beispiele: Eine holomorphe Funktion f definiert auf $[a, b]$ kann eindeutig auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \cdot e^w \\ g(z) &= e^{z+w} \end{aligned} \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$f = g$ für reelle w, z

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Identitätssatz in } z} f &= g && \text{für } z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{R} \\ \xrightarrow{\text{Identitätssatz in } w} f &= g && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

23.4 Isolierte Singularität und Laurentreihen

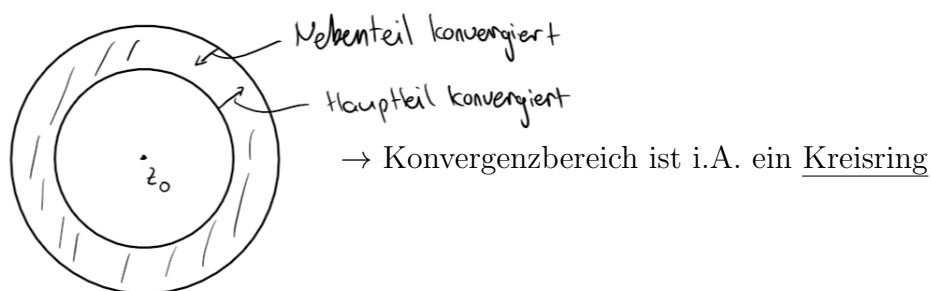
Definition: Eine Laurentreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (23.77)$$

Sie ist konvergent in z wenn

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} \quad (23.78)$$

seperat konvergieren.

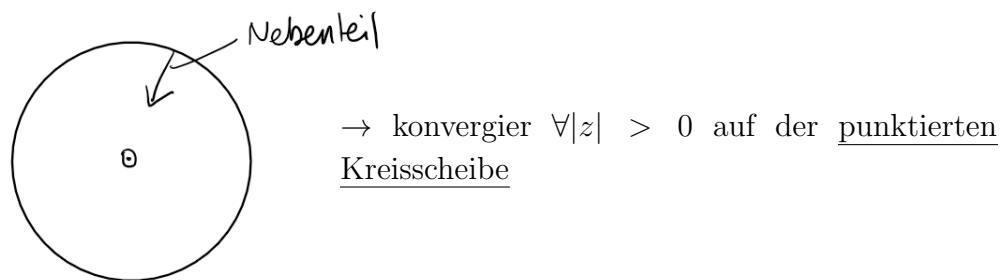


Weierstrass → Im Konvergenzbereich definiert die Laurentreihe eine holomorphe Funktion und darf gliedweise differenziert werden.

Beispiele:

(1) Wenn der Hauptteil nur endlich viele Terme hat:

$$\frac{a_{-N}}{z^N} + \dots + \frac{a_{-1}}{z}$$



Die Singularität heisst Pol der Ordnung N

(2) Die Funktion

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad (23.79)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{1}_{\text{Nebenteil}} \quad (23.80)$$

→ unendlich viele Terme im Hauptteil, Singularität nur bei $z = 0$
wesentliche Singularität

Isolierte Singularität bei z_0 : f ist holomorph auf $\Omega - \{z_0\}$

(i) hebbare Singularität

→ f kann nach z_0 holomorph fortgesetzt werden $\Leftrightarrow$ Hauptteil verschwindet

[Bsp: $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ kann holomorph nach $z = 0$ fortgesetzt werden]

(ii) Pol der Ordnung $N \Leftrightarrow$ Hauptteil endlich

(iii) wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ Hauptteil unendlich

23.4.1 Meromorphe Funktion

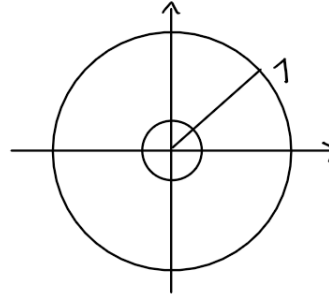
Funktionen, die bis auf isolierte Singularitäten holomorph sind

→ rationale Funktionen $\frac{P(z)}{Q(z)}$, $\tan z$, $\cot z$, $\tanh z$, $\coth z$

Beispiele: Laurentreihe von $\frac{1}{z(z-i)^2}$

1) $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{z} \frac{1}{(-i)^2} \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - \frac{z}{i}} \\
 &= \frac{-i}{z} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^n \\
 &= -\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{i^{n-1}} z^{n-1} \\
 n \rightarrow n+2 &= \underbrace{-\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{i^{n-1}} z^n}_{\text{Nebenteil}}
 \end{aligned}$$

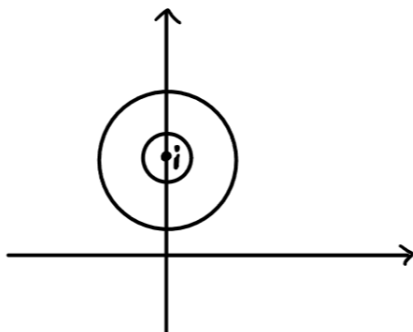


Konvergenzradius $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$

[Für $|z| > 1$: $\frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{(1-\frac{i}{z})^2} = \dots = \sum_{n=3}^{\infty} i^{n-3} (n-2) z^{-n}$]

(2) $z_0 = i$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-i)^2} &\rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} = \frac{-i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z} \\
 &= \frac{-i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} + i \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n \\
 &\rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1
 \end{aligned}$$



→ Konvergenz beschränkt durch die nächste Singularität

Ganze Funktion ($\rightarrow$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph)
 $\rightarrow$ Welche Singularitäten sind möglich für $|z| \rightarrow \infty$?

Satz

Es sei f eine ganze Funktion, es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und positive Konstanten R, M mit $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| > R$.

Dann ist f ein Polynom mit $\text{Grad } f \leq n$.

Spezialfall ($n = 0$): Satz von Liouville:

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis: f hat eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \quad (23.81)$$

Cauchy Ungleichung für Kreis mit Radius $\delta = r > R, m > n$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ |a_m| &= \frac{|f^{(m)}(0)|}{m!} \leq \frac{1}{m!} \frac{m!}{r^m} \cdot \underbrace{\max_{|z'|=r} |f(z')|}_{\leq M r^n} \\ &= M r^{n-m} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Folgerung:

23.4.2 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht-konstante Polynom $P(z)$ hat eine komplexe Nullstelle.

$$\rightarrow P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i) \text{ mit Nullstelle } z_i$$

Beweisskizze: durch Widerspruch

Nimm an, es gäbe ein nicht-konstantes Polynom $\phi(z)$ ohne Nullstelle $\rightarrow \frac{1}{P(z)}$ eine ganze Funktion

$$\text{Für } P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \exists M, r \text{ sodass } |P(z)| \geq M|z|^n \text{ für } |z| \geq R,$$

denn Verhalten des Polynoms wird durch den führenden Term bestimmt. Formal kann man dies wie folgt begründen:

Für $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + \tilde{P}(z)$, $0 < \epsilon < 1$, wähle $|z| \geq \max(1, \frac{1}{\epsilon|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|) \equiv R$. Dann

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(z)| &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1} \leq \epsilon |a_n| |z|^n \\ |a_n z^n| &\leq |P(z) - \tilde{P}(z)| \leq |P(z)| + |\tilde{P}(z)| \\ &\rightarrow |P(z)| \geq |a_n z^n| - |\tilde{P}(z)| \\ &\geq \underbrace{(1 - \epsilon)|a_n|}_{\equiv M} |z|^n \end{aligned} \tag{23.82}$$

Für $|z| \geq R$ folgt dann:

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{1}{M|z|^n} \leq \frac{1}{MR^n} \quad (23.83)$$

$\rightarrow \frac{1}{P(z)}$ beschränkt für $|z| \geq R$ und $\frac{1}{P(z)}$ ebenfalls beschränkt für $|z| < R$, da stetig und endliches Gebiet.

$\xrightarrow{\text{Liouville}} \frac{1}{P(z)}$ ist konstant $\rightarrow P(z)$ konstant $\nmid$

23.5 Logarithmus, Schnitte, Riemann-Blätter

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ \rightarrow n \neq -1 : a_n z^n &= \frac{d}{dz} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} \\ \int \frac{dz}{z} &= \text{“log } z\text{”} \end{aligned} \quad (23.84)$$

$\rightarrow$ der Koeffizient a_{-1} ist speziell, heisst Residuum $\rightarrow$ siehe Kapitel 4

Logarithmus:

$$e^{z+2\pi i n} = e^z \quad n \in \mathbb{N} \quad (23.85)$$

$\rightarrow$ Umkehrfunktion nicht eindeutig

Bisher: holomorphe Funktionen oder meromorphe Funktion an isolierter Singularität (“nulldimensionelle Singularität”)

Es existieren auch kompliziertere Singularitäten, z.B.: “eindimensionale Singularität” $\leftrightarrow$ Schnitte

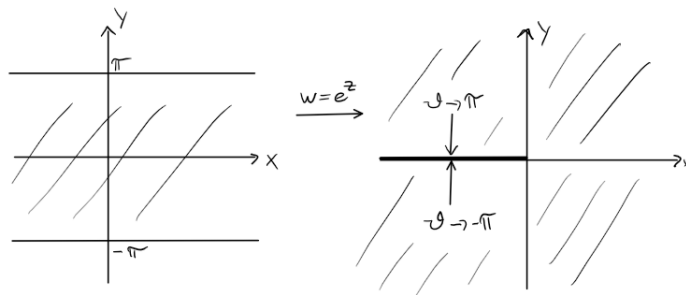
“Hauptzweig” des komplexen Logarithmus

Betrachte: $z = x + iy, \quad -\pi < y < \pi$

$$\rightarrow e^z = e^x e^{iy} = \rho e^{i\vartheta}$$

$$\rho = e^x > 0, \quad \vartheta = y (+2\pi n)$$

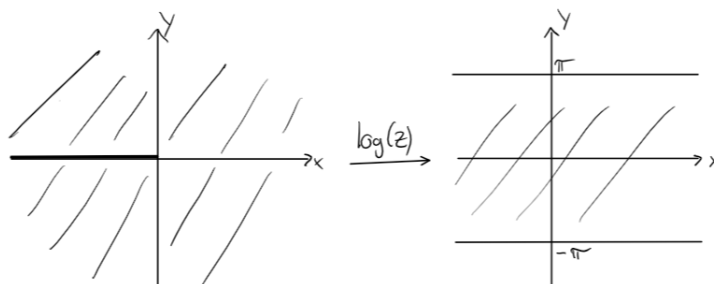
(23.86)



Streifen $-\pi < y < \pi$ wird auf die gesamte komplexe Ebene abgebildet, abgesehen von dem Schnitt auf der negativen reellen Achse.

Genauso für $\pi < y < 3\pi$ etc.

Definition: Die komplexe Exponentialfunktion bildet den Streifen $\{z | -\pi < \text{Im} z < \pi\}$ auf die komplexe Ebene mit Schnitt bei $\{z | \text{Re} z < 0, \text{Im} z = 0\}$ ab. Die Inverse dieser Abbildung heisst Hauptzweig des Logarithmus.



Für $z = re^{i\phi}, \quad -\pi < \phi < \pi$ gilt

$$\rightarrow \log z = \log r + i\phi \quad (23.87)$$

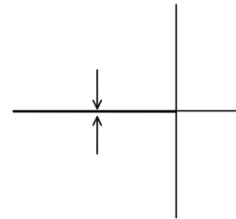
und $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ (folgt aus Inverse der Exponentialfunktion)

[Bem: Mit “log” ist immer der natürliche Logarithmus gemeint, sonst $\log_{10}$.]

Konsequenzen des Schnitts

$\log z$ ist unstetig bei $z = -x$, $0 < x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} \log(-x + i\epsilon) - \log(-x - i\epsilon) &= \\ &= \log x + i\pi - (\log x - i\pi) \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$



$\rightarrow$ Sprung oder Diskontinuität

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} -x + i\epsilon &= e^{\log x + i(\arctan \frac{\epsilon}{-x} + \pi)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} e^{\log x + i\pi} \\ -x - i\epsilon &= e^{\log x + i(\arctan \frac{-\epsilon}{-x} - \pi)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} e^{\log x - i\pi} \end{aligned} \quad (23.88)$$

Nebenzweig des Logarithmus mit Bild

$$\operatorname{Im} \log_k z \in (-\pi, \pi) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (23.89)$$

Definiere allgemeine Potenzen über Logarithmus

$$a^z \equiv e^{z \log a}, \quad z^a = e^{a \log z} \quad (23.90)$$

Beispiele: 1) Wurzelfunktion $f(z) = z^{1/2} \equiv e^{1/2 \log z}$

→ ebenfalls Schnitt bei $x < 0$

$$\begin{aligned} & \sqrt{-x + i\epsilon} - \sqrt{-x - i\epsilon} \\ = & e^{1/2(\log x + i\pi)} - e^{1/2(\log x - i\pi)} \\ = & i\sqrt{x} - (-i\sqrt{x}) = 2i\sqrt{x} \end{aligned} \quad (23.91)$$

2) Inverse der trigonometrischen/hyperbolischen Funktion:

z.B.:

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \equiv w \\ \Leftrightarrow e^{2z} - 1 &= w(e^{2z} + 1) \\ \Leftrightarrow e^{2z}(1 - w) &= 1 + w \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + w}{1 - w} \\ \rightarrow \operatorname{artanh} z &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z} \end{aligned} \quad (23.92)$$

Die Funktionalgleichungen

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (23.93)$$

$$\log a^r = r \log a \quad (23.94)$$

gelten für den komplexen Logarithmus im Allgemeinen nicht

Beispiel:

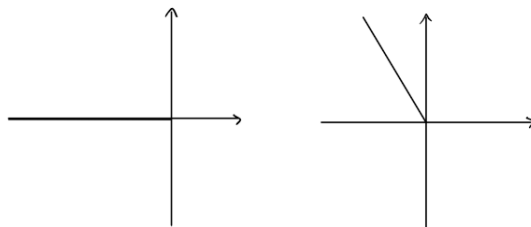
$$\log[(-1 + i\epsilon)^2] = \log(1 - 2i\epsilon) + O(\epsilon^2) = 0$$

$\neq$

$$2\log(-1 + i\epsilon) = 2(\log 1 + i\pi) = 2\pi i$$

Der Schnitt kann im Prinzip beliebig gewählt werden, solange er bei $z = 0$ startet (denn $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$)

Der Punkt, an dem der Schnitt beginnt, heisst Verzweigungspunkt



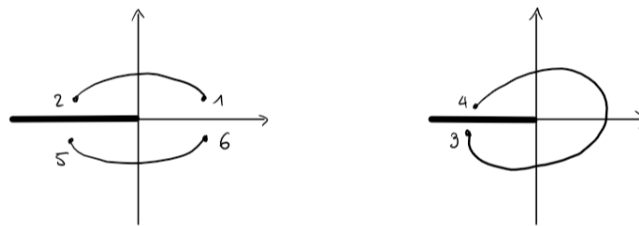
23.5.1 Riemannblätter

$\sqrt{z}$, $\log z$ sind unstetig auf dem Schnitt, wie kann man das verhindern?

Idee: betrachte zwei komplexe Ebenen

$\mathbb{C}_I$ und $\mathbb{C}_{II}$ (“Blätter”)

die so zusammengefügt werden, dass $\sqrt{z}$ beim Übergang stetig bleibt. Betrachte die folgende Trajektorie:



1 : $\sqrt{x + i\epsilon} = \sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_I$
2 : $\sqrt{-x + i\epsilon} = i\sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_I$
3 : $\sqrt{-x - i\epsilon} = i\sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_{II}$
4 : $\sqrt{-x + i\epsilon} = -i\sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_{II}$
5 : $\sqrt{-x - i\epsilon} = -i\sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_I$
6 : $\sqrt{x - i\epsilon} = \sqrt{x}$	auf $\mathbb{C}_I$

$\sqrt{z}$ bleibt stetig auf dem Schnitt, wenn man auf das zweite “Riemann-Blatt” wechselt!

Genauso für den Logarithmus:

$$\text{auf } \mathbb{C}_I \text{ (erstes Riemann-Blatt):} \quad \log(-x \pm i\epsilon) = \log x \pm i\pi$$

$$\text{auf } \mathbb{C}_{II} \text{ (zweites Riemann-Blatt):} \quad \log(-x \pm i\epsilon) = \log x \pm i\pi + \underline{2\pi i}$$

$$\text{auf } \mathbb{C}_{III} \text{ (drittes Riemann-Blatt):} \quad \log(-x \pm i\epsilon) = \log x \pm i\pi + \underline{4\pi i}$$

...

denn $\log_I(-x+i\epsilon) = \log x + i\pi = \log_{II}(-x-i\epsilon)$ etc., und die Logarithmusfunktion bleibt jeweils beim Übergang über den Schnitt stetig. Im Gegensatz zu $\sqrt{z}$ brauchen wir für $\log z$ also unendlich viele Riemann-Blätter. Entsprechend hat $z^{\frac{1}{n}}$ genau n Riemann-Blätter.

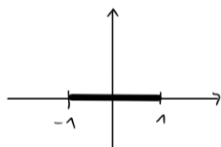
Beispiel mit 2 Schnitten

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$$

→ Verzweigungspunkte bei $z = \pm 1$

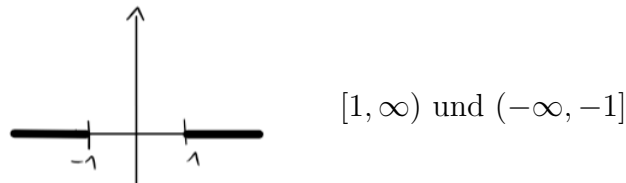
Wo liegt der Schnitt für den Hauptzweig des Logarithmus?

$$\begin{aligned} f(x \pm i\epsilon) &= \exp \left(\frac{1}{2} \log [(x \pm i\epsilon)^2 - 1] \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \left[\log |x^2 - 1| \pm i\pi \operatorname{sgn}(x) \theta(1 - x^2) \right] \right) \\ &= \sqrt{|x^2 - 1|} \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \pm i & 0 < x < 1 \\ \mp i & -1 < x < 0 \\ 1 & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$



→ Schnitt auf $[-1, 1]$

und eine andere mögliche Wahl



→ nur die Verzweigungspunkte liegen fest, die Schnitte lassen sich zurückführen auf die Definition des Logarithmus.

23.6 Analytische Fortsetzung

Identitätssatz: Kennt man eine holomorphe Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, so kennt man sie überall.

→ Sobald die Singularitäten einer Funktion bekannt sind, reicht ein Teil der reellen Achse, um die Funktion eindeutig im Komplexen zu definieren.

→ analytische Fortsetzung

Beweisidee: analytische Fortsetzung durch Potenzreihenentwicklung.

Nicht alle ∞ -oft reell differenzierbaren Funktionen können analytisch fortgesetzt werden, nur “reell-analytische Funktionen”.

Gegenbeispiel: Hutfunktion $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

→ Versuch einer analytischen Fortsetzung für $|x| > 1$ liefert $\varphi(z) \equiv 0$

Problem: wesentliche Singularität bei $z = \pm 1$. Genauso kann $e^{1/z}$ bei $z = 0$ niemals durch eine Potenzreihe erzeugt werden.

Potenzreihen in der Praxis nicht immer die effizienteste Methode der analytischen Fortsetzung:

- 1) Funktionalgleichung
- 2) Integral/Differentialgleichung
- 3) Rekursionsbeziehungen

Beispiel: Gammafunktion $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$$

→ wollen $\Gamma(z)$ als analytische Funktion fortsetzen

$$\begin{aligned} t \rightarrow \infty, \text{Konvergenz klar wegen } e^{-t} \\ t \rightarrow 0 : \int_0^\epsilon \frac{dt}{t^{1-\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}} \\ = \int_0^\epsilon \frac{dt}{t^{1-\operatorname{Re} z}} e^{i\operatorname{Im} z \log t} \end{aligned} \quad (23.95)$$

→ absolut konvergent für $1 - \operatorname{Re} z < 1 \rightarrow \boxed{\operatorname{Re} z > 0}$

→ Integraldarstellung für $\Gamma(z)$ gültig für $\operatorname{Re} z > 0$, setze analytisch fort für beliebige z

Rekursionsbeziehung:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty dt \underbrace{t^z e^{-t}}_{-\frac{d}{dt}(t^z e^{-t}) + z t^{z-1} e^{-t}} \\ &= \underbrace{-[t^z e^{-t}]_0^\infty}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re} z > 0} + z \Gamma(z) = z \Gamma(z) \end{aligned} \quad (23.96)$$

Für $\operatorname{Re} z < 0$ definiere $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) \quad -1 < \operatorname{Re} z < 0$$

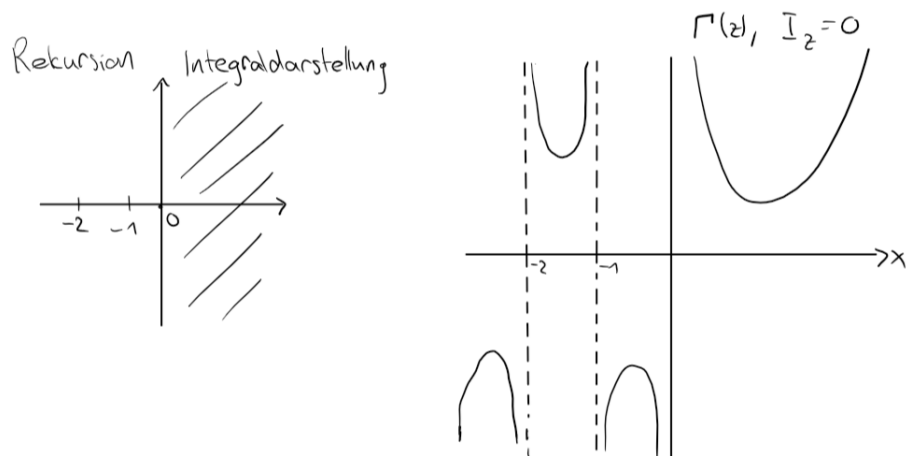
$$= \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2) \quad -2 < \operatorname{Re} z < 0$$

etc.

→ Polstellen bei $z = 0, -1, -2, \dots$

aber auf $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ definiert dies eine eindeutige analytische Fortsetzung.

$$\text{z.B.: } \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$



Spezielle Werte der Γ Funktion:

$$z \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1) \dots \Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-t} \stackrel{*}{=} \int_0^\infty dx \frac{2x}{x} e^{-x^2} = 2 \int_0^\infty dx e^{-x^2} = \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

$$* t = x^2 \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad (23.97)$$

23 Residuensatz und Anwendungen

23.1 Residuensatz

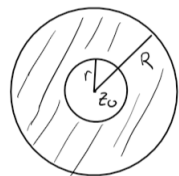
Satz von Cauchy

$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ für holomorphe Funktion f ($\mathcal{C}$ geschlossene Kurve in Ω , einfach zusammenhängend)

Residuensatz:

Verallgemeinerung für Funktionen mit Singularitäten

Idee: betrachte Laurent-Reihe um Singularität z_0 , mit Konvergenzgebiet $r < |z - z_0| < R$



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz & \stackrel{*}{=} \sum_{n \neq -1} a_n \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz}_{=0} + a_{-1} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} \\ & = 2\pi i \underbrace{a_{-1}}_{\text{Residuum}} \end{aligned} \quad (23.1)$$

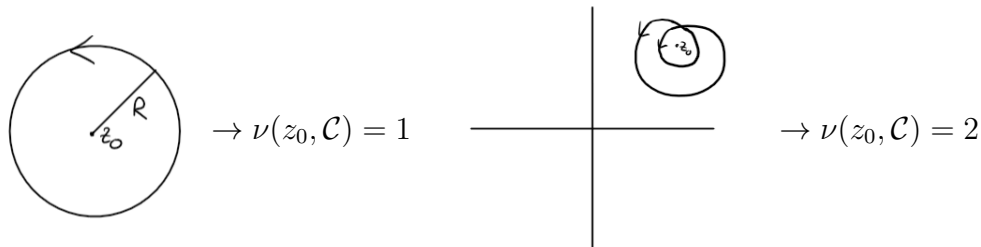
$\mathcal{C}$: Im Konvergenzbereich der Laurent-Reihen

*gleichmässige Konvergenz

Umlaufzahl: bisher implizit angenommen, dass $\mathcal{C}$ die Singularität einmal und in positiver Richtung umläuft.

→ definiere Umlaufzahl $\nu(z_0, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-z_0}$

Beispiele:



→ typischerweise haben fast alle (relevanten) Wege $\nu = \pm 1$

Residuensatz

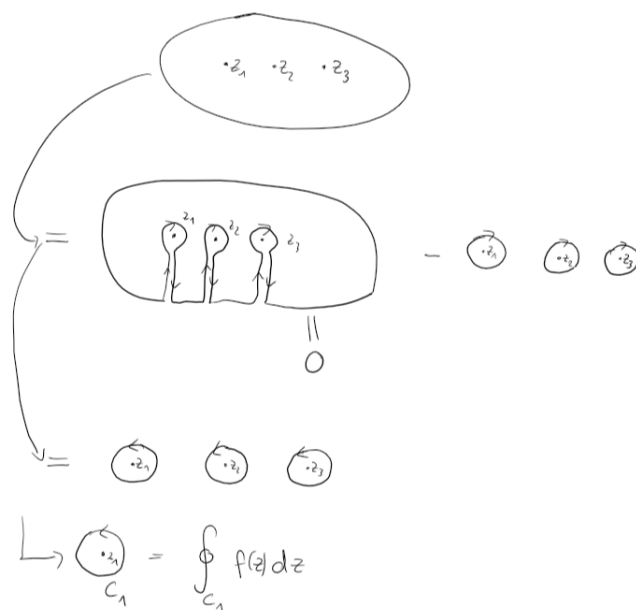
Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten bei $z_1, \dots, z_n$, $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve in Ω (einfache zusammenhängend), die durch keine der Punkte z_i läuft. Dann gilt:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \nu(z_i, \mathcal{C}) \text{Res}_{z_i} f} \quad (23.2)$$

wobei das Residuum von f am Punkt z_i definiert ist als

$$\text{Res}_{z_i} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_i} f(z) dz = a_{-1} \text{ mit } \nu(z_i, \mathcal{C}_i) = 1 \quad (23.3)$$

Beweisskizze: Betrachte zunächst eine Singularität bei z_1 . Nach dem Satz von Cauchy können wir die Kontur so verformen, dass nur ein Weg $\mathcal{C}_1$ um z_1 übrig bleibt. Genauso verfahren wir im allgemeinen Fall:



wobei die verbleibenden Integrale um z_i nicht von der Wahl des Weges $\mathcal{C}_i$ abhängen und über die Residuuen bei z_i ausgedrückt werden können:

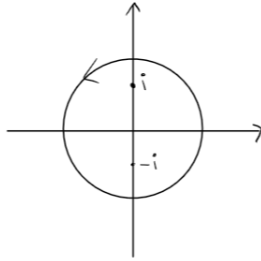
Für Polstelle: wähle $\mathcal{C}_i = \{z \mid |z - z_i| = \epsilon\}_{\epsilon \rightarrow 0}$ (oder zumindest ϵ klein genug, dass die Laurent-Reihe konvergiert).

Für wesentliche Singularität: wähle $r < \epsilon < R$. In beiden Fällen gilt dann:

$$\text{Res}_{z_i} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(z) dz = a_{-1} \quad (23.4)$$

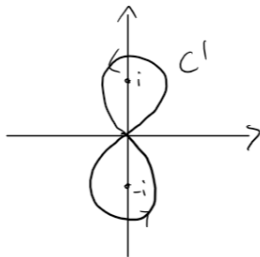
Beispiele:

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i (\text{Res}_i f + \text{Res}_{-i} f) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right) = 0$$



wobei:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} \stackrel{z=-i}{=} \frac{1}{z+i} \left(\frac{1}{-2i} \right) \frac{1}{1 + \frac{z+i}{-2i}} \\
 &= -\frac{1}{2i} \left[(z+i)^{-1} + \frac{(z+i)^0}{2i} + \frac{(z+i)^1}{(2i)^2} + \frac{(z+i)^2}{(2i)^3} + \dots \right] \\
 &\rightarrow \text{Res}_{-i} = -\frac{1}{2i} \\
 f &= \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \rightarrow \text{Res}_i f = \frac{1}{2i}
 \end{aligned}$$



$$\oint_{C'} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i (\text{Res}_i f - \text{Res}_{-i} f) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \left(-\frac{1}{2i} \right) \right) = 2\pi$$

Berechnung von Residuen in der Praxis

Betrachte eine Funktion der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ($g(z), h(z)$ holomorph)

(i) einfache Nullstelle bei $z = z_0$

$$h(z) = (z - z_0)h'(z_0) + O((z - z_0)^2) \quad (23.5)$$

$$\rightarrow \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + O(z - z_0)}{(z - z_0)h'(z_0) + O((z - z_0)^2)} = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)h'(z_0)} + O((z - z_0)^0) \quad (23.6)$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}} \quad (23.7)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)} \rightarrow h(z) = 1 + z^2, \quad g(z) = 1, \quad h'(z) = 2z \\ \rightarrow \text{Res}_i f &= \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i} \\ \text{Res}_{-i} f &= \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=-i} = -\frac{1}{2i} \end{aligned}$$

(ii) Pol k -ter Ordnung

$(z - z_0)^k f(z)$ hat eine hebbare Singularität

$$\rightarrow f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \rightarrow (z - z_0)^k f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n}_{\rightarrow \text{wollen } n=k-1} \quad (23.8)$$

$$\left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right|_{z=z_0} = (k-1)! a_{-1} \quad (23.9)$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right|_{z=z_0}} \quad (23.10)$$

$$\begin{aligned}
k = 1 : \quad \operatorname{Res}_{z_0} f &= (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \\
k = 2 : \quad \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 \frac{g(z)}{h(z)} \Big|_{z=z_0} &= \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2)}{(z - z_0)^2 \left(\frac{h''(z_0)}{2} + \frac{h'''(z_0)}{3!} (z - z_0) + O((z - z_0)^2) \right)} \Big|_{z=z_0} \\
&= \frac{d}{dz} \left[\left(g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2) \right) \right. \\
&\quad \times \frac{2}{h''(z_0)} \left(1 - \frac{h'''(z_0)}{3h''(z_0)} (z - z_0) + O((z - z_0)^2) \right) \Big] \Big|_{z=z_0} \\
&= \frac{2}{h''(z_0)} \left(g'(z_0) - g(z_0) \frac{h'''(z_0)}{3h''(z_0)} \right) \\
&= \frac{6g'(z_0)h''(z_0) - 2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2} \\
&\xrightarrow{h'''(z_0)=0} \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} \tag{23.11}
\end{aligned}$$

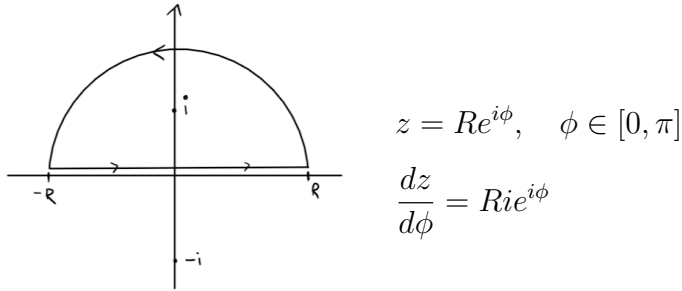
Fazit: Durch den Residuensatz können Integrale auf Funktionswerte und Ableitungen zurückgeführt werden!

23.2 Reelle Integrale

Wir wollen $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ über den Residuensatz anschauen

$$[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi]$$

Für die Anwendung des Residuensatzes $\rightarrow$ finde "richtige" Kontur in der komplexen Ebene

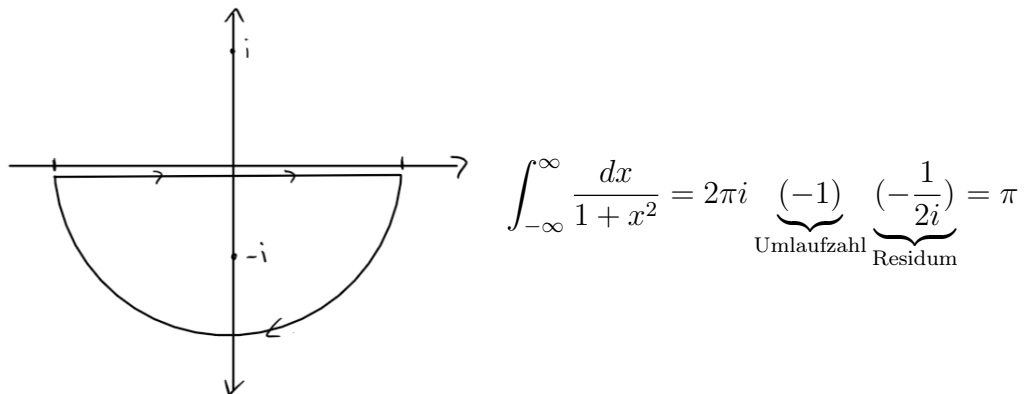


$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \underbrace{\int_0^\pi d\phi \frac{iRe^{i\phi}}{1+(Re^{i\phi})^2}}_{I_R} = 2\pi i \underbrace{\text{Res}_{\frac{1}{2i}} f}_{\frac{1}{2i}} = \pi \quad (23.12)$$

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \pi R \max_{\phi \in [0, \pi]} \left| \frac{1}{1+(Re^{i\phi})^2} \right| = \pi R \max_{\phi \in [0, \pi]} \frac{1}{\sqrt{(1+R^2 e^{2i\phi})(1+R^2 e^{-2i\phi})}} \\ &= \pi R \max_{\phi \in [0, \pi]} \frac{1}{\sqrt{1+R^4+2R^2 \cos(2\phi)}} \\ &\leq \pi R \frac{1}{\sqrt{1+R^4-2R^2}} = \frac{\pi R}{|R^2-1|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (23.13)$$

Intuitiv: $I_R \sim \frac{R}{R^2} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Alternativ:



Genauso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} \quad (23.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \quad \downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} (-2a) = -\frac{\pi}{a^2} \quad (23.15)$$

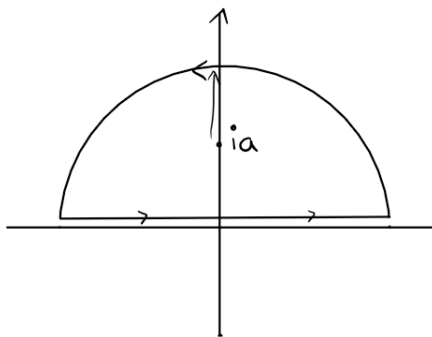
$$\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \quad (23.16)$$

→ überprüfe mit dem Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} \stackrel{*}{=} 2\pi i \frac{1}{4ia^3} = \frac{\pi}{2a^3} \quad (23.17)$$

mit Kontur



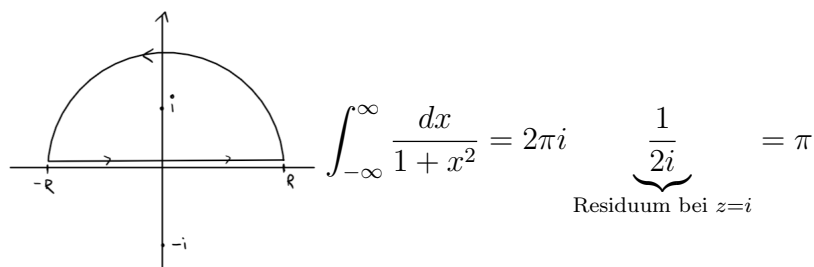
wobei der Beitrag von
 verschwindet:

$$\underbrace{\pi R}_{\text{Länge des Integrationsweges}} \cdot \underbrace{\frac{1}{R^4}}_{x=Re^{i\phi}; |\text{Interand}| \sim \frac{1}{|x|^4} \sim \frac{1}{R^4}} \sim \frac{1}{R^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (23.18)$$

$$* \quad \operatorname{Res}_{ia} \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{d}{dx} (x - ia)^2 \frac{1}{(x + ia)^2 (x - ia)^2} \bigg|_{x=ia} = -\frac{2}{(2ia)^3} = \frac{1}{4ia^3}$$

mit doppelter Polstelle bei $z = ia$ (23.19)

23.3 Weitere Beispiele



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \underbrace{\frac{1}{2i}}_{\text{Residuum bei } z=i} = \pi$$

①

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \quad (23.20)$$

→ Polstelle bei $x = -1$

Integrand nicht symmetrisch unter $x \rightarrow -x$

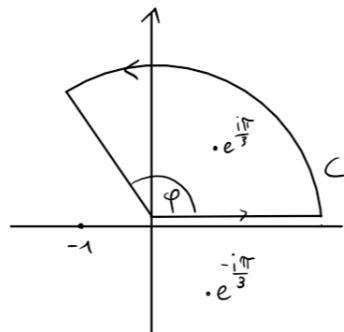
→ Standard-
kontur



funktioniert
nicht

Singularität $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = (-1)^{1/3} \quad [x = -1]$

$$\rightarrow x = \exp\left(\frac{1}{3} \log(-1)\right) = \exp\left(\frac{1}{3}(i\pi + 2\pi in)\right) = \{e^{\frac{i\pi}{3}}, -1, e^{-\frac{i\pi}{3}}\} \quad (23.21)$$



→ Winkel φ zunächst frei

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}}_I + \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^\varphi d\varphi' \frac{iRe^{i\varphi'}}{1+(Re^{i\varphi'})^3}}_{\sim \frac{R}{R^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_\infty^0 dx \frac{e^{i\varphi}}{1+(xe^{i\varphi})^3}}_{II} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{\frac{i\pi}{3}}} \frac{1}{1+x^3} \\
&= 2\pi i \frac{1}{3x^2} \Big|_{e^{\frac{i\pi}{3}}} = \frac{2\pi i}{3} e^{-\frac{2\pi i}{3}}
\end{aligned} \tag{23.22}$$

$$\begin{aligned}
II &= - \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \underbrace{(xe^{i\varphi})^3}_{\substack{=x^3 \\ \underbrace{e^{3i\varphi}}_{e^{3i\varphi} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}}}}} e^{i\varphi} = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot I
\end{aligned} \tag{23.23}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow I &= \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{2\pi i}{3} e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{(-e^{\frac{\pi i}{3}})(e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{-\frac{\pi i}{3}})} e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \frac{\pi}{3 \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{23.24}$$

$$\begin{aligned}
* &= (e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{-\frac{\pi i}{3}}) = 2i \sin \frac{\pi}{3} \\
e^{-\frac{2\pi i}{3}} (-e^{-\frac{\pi i}{3}}) &= -e^{-i\pi} = +1
\end{aligned}$$

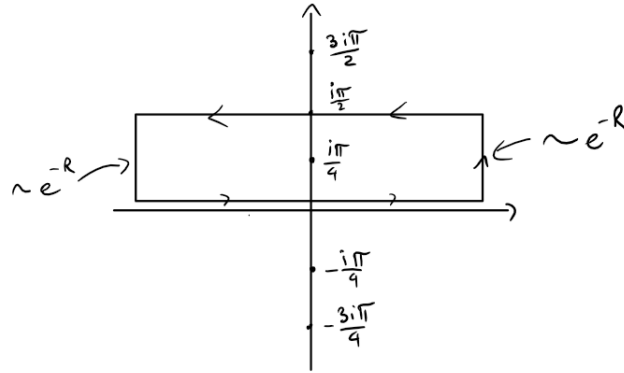
$$\textcircled{2} \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{e^x + e^{-3x}}$$

Singularitäten:

$$e^x + e^{-3x} = 0 \tag{23.25}$$

$$e^{4x} = -1 \tag{23.26}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{4}(i\pi + 2\pi in) = \frac{i\pi}{4} + n\frac{i\pi}{2} \tag{23.27}$$



$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + \frac{i\pi}{2}}{\underbrace{e^{x+\frac{i\pi}{2}} + e^{-3(x+\frac{i\pi}{2})}}_{i(e^x + e^{-3x})}}} = 2\pi i \underbrace{\frac{x}{e^x - 3e^{-3x}}}_{= \frac{\frac{i\pi}{4}}{e^{\frac{i\pi}{4}}(1-3e^{-4\frac{i\pi}{4}})} = \frac{i\pi}{16}e^{-\frac{i\pi}{4}}} \bigg|_{x=\frac{i\pi}{4}} \quad (23.28)$$

$$I = \frac{1}{1+i} \left(-\frac{\pi^2}{8} e^{-\frac{i\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-3x}}}_{I'} \right) \quad (23.29)$$

Das neue Integral I' ist einfacher als I (die Potenz x im Zähler fehlt), also werten wir die gleiche Kontur nun für I' aus:

$$\overbrace{I' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{i(e^x + e^{-3x})}}^{I'(1+i)} = 2\pi i \underbrace{\frac{1}{e^x - 3e^{-3x}}}_{e^{\frac{i\pi}{4}}(1-3e^{-4\frac{i\pi}{4}})=4e^{\frac{i\pi}{4}}} \bigg|_{x=\frac{i\pi}{4}} \quad (23.30)$$

$$I' = \frac{1}{1+i} \frac{2\pi i}{4e^{\frac{i\pi}{4}}} \underset{2i}{=} \frac{\pi i}{2} \frac{\sqrt{2}}{(1+i)^2} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2} \quad (23.31)$$

$$* e^{\frac{i\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

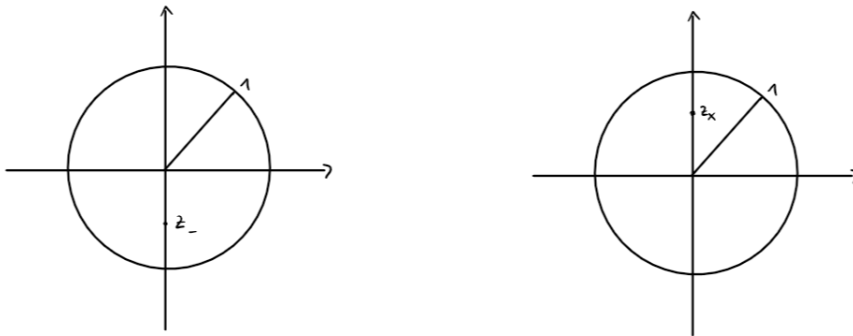
Beides zusammen gibt dann:

$$I = \frac{1}{1+i} \left(-\frac{\pi^2}{8} e^{-\frac{i\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} I' \right) = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{1+i} \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \quad (23.32)$$

③ Trigonometrische Integrale

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} \quad |a| > 1; z = e^{it} \\
 &= 2 \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2 + 2iaz - 1} \quad \mathcal{C} : \text{Einheitskreis}
 \end{aligned} \tag{23.33}$$

Nullstellen: $z_{\pm} = -i(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$



→ für $a > 1$ / $a < -1$ trägt z_- / z_+ bei

$$I = 2 \times 2\pi i \frac{1}{2z+2ia} \Big|_{z=z_{\mp}} = \frac{4\pi i}{2(\pm i\sqrt{a^2-1})} = \text{sgn}(a) \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \tag{23.34}$$

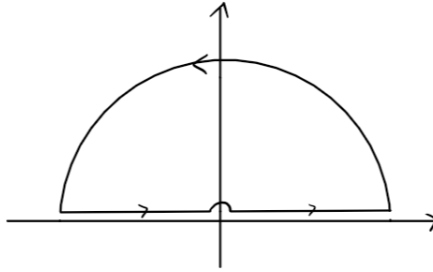
④ Oszillierende Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} \quad \rightarrow \text{nicht absolut konvergent!} \tag{23.35}$$

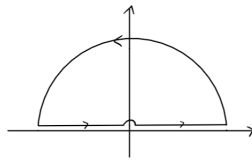
$\frac{\sin x}{x}$ ist hebbar bei $x = 0$! → keine Singularität

→ verforme Kontur so, dass $x = 0$ vermieden wird.

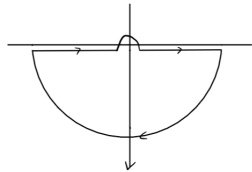
Dies ist nach dem Satz von Cauchy erlaubt, weil die Singularität bei $x = 0$ hebbar ist. Als nächstes schreiben wir $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Damit der Beitrag des Halbkreises verschwindet, müssen wir für den ersten Term die untere Halbebene wählen, für den zweiten Term die obere.



$\frac{e^{ix}}{2ix}$: Kein Beitrag, da die verformte Kontur $x = 0$ verfehlt.



$\frac{e^{-ix}}{2ix}$: Beitrag von Residuum bei $x = 0$.



Also:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{e^{ix}}{2ix} - \frac{e^{-ix}}{2ix} \right) \quad (23.36)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1}{2i} \right) \underbrace{(-1)}_{\text{Windungszahl}} \underbrace{\text{Res}_0 \frac{e^{-ix}}{x}}_{=1} = \pi \quad (23.37)$$

Genauso:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \left(\frac{-1}{4} \right) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{-1}{4} \right) (-1) \underbrace{\operatorname{Res}_0 \frac{e^{-2ix}}{x^2}}_{=-2i} = \pi \quad (23.38)
 \end{aligned}$$

Wieder: e^{2ix} kein Beitrag, e^{-2ix} Beitrag von Residuum bei $x = 0$, und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 0$ für beide Konturen.

⑤ Gaussintegral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \text{am einfachsten über Polarkoordinaten} \quad (23.39)$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} \phi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi \quad (23.40)$$

Eine Herleitung über den Residuensatz ist wie folgt möglich. Betrachte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz g(z) \quad \text{mit} \quad g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$$

[a zunächst frei]

→ Singularitäten $e^{-2az} = -1 \rightarrow z = \frac{i\pi}{2a}(1 + 2n)$

Strategie wie bei Beispiel ②, aber a kann komplex sein

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dz g(z) - \int_{-\infty}^{\infty} dz g\left(z + \frac{i\pi}{a}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1 + e^{-2az}} \left(e^{-z^2} - e^{-(z + \frac{i\pi}{a})^2} \right) \\
&= 2\pi i \frac{e^{-z^2}}{-2ae^{-2az}} \Big|_{z=\frac{i\pi}{2a}} \\
&= \frac{\pi i}{a} e^{\frac{\pi^2}{4a^2}}
\end{aligned} \tag{23.41}$$

Nebenrechnungen:

$$e^{-z^2} - e^{-(z + \frac{i\pi}{a})^2} = e^{-z^2} \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{a}z + \frac{\pi^2}{a^2}} \right) \stackrel{!}{=} e^{-z^2} (1 + e^{-2az})$$

$$\text{wähle } a = \sqrt{i\pi}, \text{ denn } -\frac{2\pi iz}{a} = -2z\sqrt{i\pi} = -2az$$

$$\text{und } e^{\frac{\pi^2}{a^2}} = e^{\frac{\pi^2}{i\pi}} = e^{-i\pi} = -1$$

$$\rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \frac{i\pi}{a} e^{\frac{\pi^2}{4a^2}} \Big|_{a=\sqrt{i\pi}} = \sqrt{i\pi} e^{\frac{\pi}{4i}} = \sqrt{\pi}$$

$$\text{mit } e^{\frac{\pi}{4i}} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{i}}, \text{ denn } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2 = -\frac{2i}{2} = \frac{1}{i}.$$

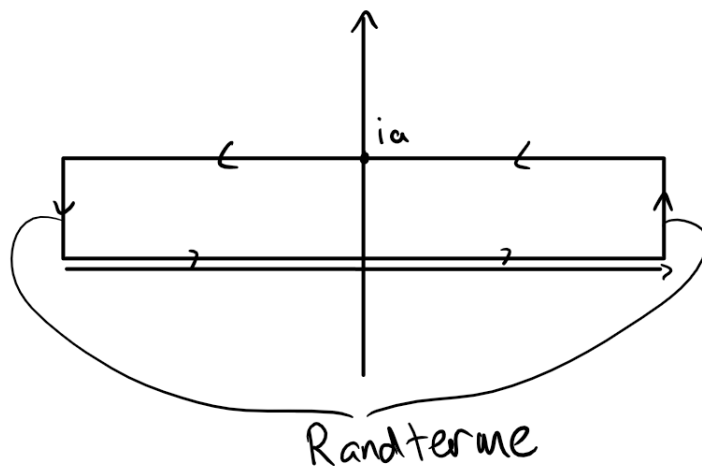
Bei Fouriertransformation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+ia)^2} \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \quad \text{für reelles } a \tag{23.42}$$

Haben Ableitung nach a ausgerechnet und gezeigt, dass sie verschwindet.

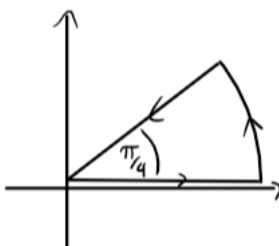
Begründung über komplexe Analysis: Randterme $\approx e^{-R^2}$ verschwinden für $R \rightarrow \infty$. Deshalb:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} - \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+ia)^2} = 0 \tag{23.43}$$



→ komplexe Verschiebung im Integral ist erlaubt!

Ähnlich: Gaussintegral mit komplexen Argument:



$$\int_0^\infty dx e^{-x^2} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} d\varphi i R e^{i\varphi} e^{-R^2 e^{2i\varphi}}}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ wie in (1)}} - \int_0^\infty dx e^{\frac{i\pi}{4}} \underbrace{e^{-\left(e^{\frac{i\pi}{4}} x\right)^2}}_{e^{-ix^2} \text{ denn } e^{\frac{i\pi}{2}} = i} = 0 \quad (23.44)$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^\infty dx e^{-ix^2}}_{\int_0^\infty dx \cos x^2 - i \int_0^\infty dx \sin x^2} = e^{\frac{-i\pi}{4}} \underbrace{\int_0^\infty dx e^{-x^2}}_{= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad (23.45)$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^\infty dx \cos x^2 = \int_0^\infty dx \sin x^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}} \text{ Fresnel-Integrale} \quad (23.46)$$

Beachte: $\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{i}}$

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \text{ mit } \operatorname{Re} a > 0$$

Haben gezeigt: (23.46) folgt als analytische Fortsetzung mit $a \rightarrow \epsilon + i, \epsilon \rightarrow 0$

23.4 Greensche Funktionen

Häufig ist die Berechnung der Greenschen Funktionen am einfachsten über Fouriertransformation + Residuensatz

Zurück zum gedämpften harmonischen Oszillator:

$$\ddot{G}(t) + \gamma \dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t) \quad (*) \quad (23.47)$$

Wir hatten gefunden:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\Omega t), \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (23.48)$$

mit Randbedingungen $G(0^+) = 0, \dot{G}(0^+) = 1$

Lösung über Fouriertransformation:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{G}(\omega) \quad (23.49)$$

$$\tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) \quad (23.50)$$

$$\xrightarrow{\text{FT}(*)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} [(i\omega)^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2] \tilde{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \quad (23.51)$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}} \quad (23.52)$$

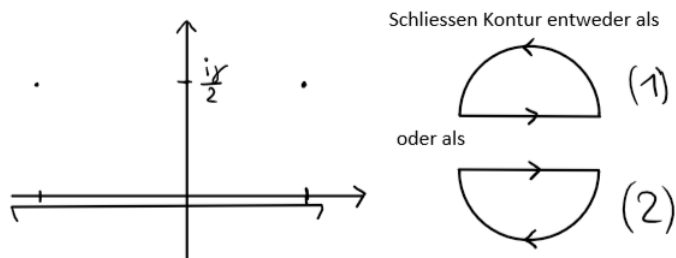
$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (23.53)$$

→ Berechnung über Residuensatz

Singularitäten:

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \quad (23.54)$$

$$\omega_{\pm} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{i\gamma}{2} \pm \Omega \quad \gamma > 0 \quad (23.55)$$



Integral über Halbkreis soll nicht beitragen → $e^{i\omega t}$

$$1) \quad t > 0 \rightarrow (1), e^{-R|t|} \text{ für } \omega = iR, R \rightarrow \infty$$

$$2) \quad t < 0 \rightarrow (2), e^{-R|t|} \text{ für } \omega = -iR, R \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow G(t) = 0 \text{ für } t < 0 \quad (23.56)$$

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi} 2\pi i \sum_{\pm} \text{Res}_{\omega_{\pm}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \\
&= \theta(t) i \left(\frac{e^{i\omega_+ t}}{i\gamma - 2\omega_+} + \frac{e^{i\omega_- t}}{i\gamma - 2\omega_-} \right) = \theta(t) \frac{1}{\Omega} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\Omega t) \quad (23.57)
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{e^{i\omega_+ t}}{i\gamma - 2\omega_+} + \frac{e^{i\omega_- t}}{i\gamma - 2\omega_-} = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{-2\Omega} + \frac{e^{-i\Omega t}}{2\Omega} \right) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left(-\frac{i}{\Omega} \right) \sin(\Omega t)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
e^{i\omega t} &= e^{it(R \cos \phi + Ri \sin \phi)} \\
&= e^{itR \cos \phi} \underbrace{e^{-Rt \sin \phi}}_{\sim e^{-R} \quad R \rightarrow \infty}
\end{aligned}$$

solange $t \sin(\phi) > 0$

$t > 0 \rightarrow \sin \phi > 0 \rightarrow \phi \in [0, \pi] \rightarrow$ obere Halbebene

$t < 0 \rightarrow \sin \phi < 0 \rightarrow \phi \in [\pi, 2\pi] \rightarrow$ untere Halbebene (23.58)

Allgemein ist FT+ Residuensatz eine gute Strategie für Greensche Funktionen

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \rightarrow \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \quad (23.59)$$

mit:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\vec{\nabla})^2 \rightarrow (i\vec{k})^2 = -\vec{k}^2 \\
\vec{\delta}^{(3)}(\vec{k}) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{G}(\vec{k}) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{k^2} e^{ikrz} \quad r = |\vec{x}|; z = \cos \theta \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\
&\stackrel{k \rightarrow \frac{k}{r}}{=} -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \quad x = kr; \frac{dx}{dk} = r; dk = \frac{dx}{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \tag{23.60}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} &= \frac{2 \sin(kr)}{kr} \\
\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{über Residuensatz})
\end{aligned}$$

$$\boxed{G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi |\vec{x}|}} \tag{23.61}$$

23.5 Gamma- und Zeta-Funktionen

Integraldarstellungen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad \operatorname{Re} z > 0 \tag{23.62}$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \quad \operatorname{Re} z > 1 \tag{23.63}$$

Analytische Fortsetzungen über $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und

$$\boxed{\zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{\pi^{z-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1-z}{2})}{\Gamma(\frac{z}{2})}} \quad (23.64)$$

→ leite dies her unter Anwendung des Residuensatzes

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}} \quad (23.65)$$

Leite her für $-1 < z < 1$, dann setze analytisch fort

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty ds s^z e^{-s} \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \quad (23.66)$$

$$= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt \underbrace{\left(\frac{s}{t}\right)^z}_v e^{-\underbrace{(s+t)}_u} \quad (23.67)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty du u e^{-u}}_{\Gamma(2)=1} \underbrace{\int_0^\infty dv \frac{v^z}{(1+v)^2}}_{I(z)} \quad (23.68)$$

mit Jacobi-Determinante

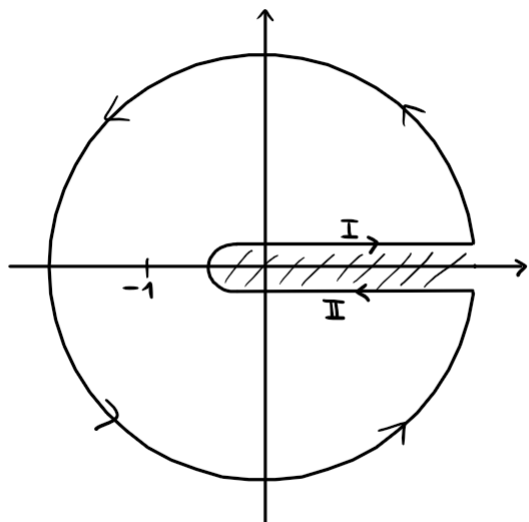
$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{array} \right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{u}{t^2} = \frac{(1+v)^2}{u} \quad (23.69)$$

Berechnung von $I(z)$: über Residuensatz:

Singularitäten: doppelte Polstelle bei $v = -1$ und Schnitt in v , wegen $v^z = e^{z \log v}$

Für die Standardwahl des Schnitts auf $(-\infty, 0]$ würden Polstelle und der Schnitt überlappen → wähle Schnitt für $v \in [0, \infty)$

$$\int_0^\infty dv \frac{v^z}{(1+v)^2} - \int_0^\infty \frac{(v-i\epsilon)^z}{(1+v)^2} = 2\pi i \text{Res}_{-1} \frac{v^z}{(1+v)^2} \quad (23.70)$$



Nebenrechnungen:

$$(v + i\epsilon)^z = \exp(z \underbrace{\log(v + i\epsilon)}_{\log v}) = v^z$$

$$\begin{aligned} (v - i\epsilon)^z &= \exp(z \underbrace{\log(v - i\epsilon)}_{\log v + 2\pi i}) \\ &= v^z \underbrace{e^{2\pi iz}}_{\rightarrow \text{relevant f\"ur } z \notin \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I(z)(1 - e^{2\pi iz}) &= 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} \frac{v^z}{(1+v)^2} \\ &= 2\pi i \frac{d}{dv} (1+v)^2 \frac{v^z}{(1+v)^2} \Big|_{v=-1} \\ &= 2\pi i \cdot z \cdot v^{z-1} \Big|_{v=-1=e^{i\pi}} \\ &= -2\pi i z e^{i\pi z} \end{aligned} \tag{23.71}$$

$$\rightarrow I(z) = \frac{2\pi i z e^{i\pi z}}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \quad (23.72)$$

$$\rightarrow \underbrace{\Gamma(z)}_{\frac{\Gamma(z+1)}{z}} \Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (23.73)$$

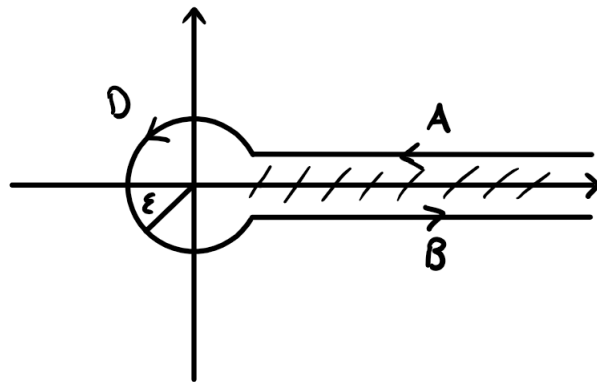
Konsequenz für $z = \frac{1}{2}$:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi \rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (23.74)$$

→ weitere Herleitung des Gaussintegrals

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{(2\pi)^z \Gamma(1-z)}{\Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(1-\frac{z}{2})}} \quad (23.75)$$

Wir betrachten folgende Kontur $\mathcal{C}$



die wir für die Funktion $f(t) = \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \frac{1}{\Gamma(z)}$ auswerten werden. Der Schnitt wird wieder auf der positiven reellen Achse gewählt. Die verschiedenen Beiträge sind:

$$I = I_C = I_A + I_B + \underbrace{I_D}_{\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0} \quad (23.76)$$

$$I_A = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\infty}^{\epsilon} dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\zeta(z) \quad (23.77)$$

$$I_B = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \frac{\overbrace{(t - i\epsilon)^{z-1}}^{t^{z-1} e^{2\pi i(z-1)}}}{e^t - 1} = e^{2\pi i z} \zeta(z) \quad (23.78)$$

$$I = I_C = (e^{2\pi i z} - 1)\zeta(z) \quad (23.79)$$

Warum wählen wir diese Kontur?

- 1) Das Zwischenergebnis für I_C ist nützlich für $z \notin \mathbb{Z}$, und am Ende wird wieder analytisch fortgesetzt
- 2) Die Integraldarstellung ist gültig $\operatorname{Re} z > 1 \rightarrow$ durch die Verformung D umgehen wir die Singularität bei $z = 0$
- 3) Singularität bei $e^t - 1 = 0 \rightarrow t = \pm 2\pi i \rightarrow$ das Ergebnis für I_C bleibt unverändert, solange der Radius des Wegstückes D kleiner ist als 2π

Nächster Schritt: verforme D über diese Singularitäten hinweg, mit Radius $R \rightarrow \infty$

$\rightarrow$ Residuen bei $t = \pm 2\pi i n$ müssen kompensiert werden

Dabei: betrachte $\boxed{z < 0}$ (am Ende wieder analytisch fortsetzen)

Für $z < 0$ verschwindet das Integral bei ∞ , also $I_C + 2\pi i \sum_{\text{Res}} = 0$, und somit:

$$I_C = (e^{2\pi i z} - 1)\zeta(z) = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Res}_{2\pi i n} f + \operatorname{Res}_{-2\pi i n} f) \quad (23.80)$$

Die Residuen sind:

$$\operatorname{Res}_{\pm 2\pi i n} f = \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{t^{z-1}}{e^t} \Big|_{t=\pm 2\pi i n} = \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \begin{array}{l} (2\pi n e^{\frac{i\pi}{2}})^{z-1} \\ (2\pi n e^{\frac{3i\pi}{2}})^{z-1} \end{array} \right\} \quad (23.81)$$

denn:

$$+i = e^{\frac{i\pi}{2}}; \quad -i = e^{\frac{3i\pi}{2}} \quad (23.82)$$

$$(23.83)$$

für den Schnitt auf der reellen Achse.

[Für den Standardfall hätten wir sonst: $+i = e^{\frac{i\pi}{2}}; -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$] Es folgt:

$$\begin{aligned} (e^{2\pi iz} - 1)\zeta(z) &= -\frac{2\pi i}{\Gamma(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-z+1}} (2\pi)^{z-1} \left(e^{\frac{\pi i(z-1)}{2}} + e^{\frac{3\pi i(z-1)}{2}} \right) \\ &= \zeta(1-z) \frac{(2\pi)^z}{\Gamma(z)} \left(e^{\frac{3\pi iz}{2}} - e^{\frac{\pi iz}{2}} \right) \end{aligned} \quad (23.84)$$

mit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-z+1}} = \zeta(1-z) \quad \text{wegen} \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (23.85)$$

Somit:

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{(2\pi)^z}{\Gamma(z)} \frac{e^{\frac{\pi iz}{2}} - e^{\frac{-\pi iz}{2}}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \zeta(1-z) \frac{(2\pi)^z \Gamma(1-z)}{\Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(1-\frac{z}{2})} \quad (23.86)$$

mit:

$$\frac{e^{\frac{\pi iz}{2}} - e^{\frac{-\pi iz}{2}}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{\sin(\pi z)} = \frac{\Gamma(z) \Gamma(1-z)}{\Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(1-\frac{z}{2})} \quad (23.87)$$

Die Herleitung erfolgte für $z < 0$, aber das Ergebnis kann jetzt wieder für beliebige z erweitert werden (durch analytische Fortsetzung).

$$\textcircled{3} \quad \boxed{\Gamma(z+1) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z}} \Gamma(2z+1)} \quad (23.88)$$

Für $z \rightarrow -\frac{z}{2}$ erhält man daraus

$$\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-z}} \Gamma(1-z) \quad (23.89)$$

und somit

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \frac{\pi^z \Gamma(1 - \frac{z}{2}) \Gamma(\frac{1-z}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{z}{2}) \Gamma(1 - \frac{z}{2})} \quad (23.90)$$

$$= \zeta(1-z) \frac{\pi^{z-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1-z}{2})}{\Gamma(\frac{z}{2})} \quad (23.91)$$

Die Herleitung von ③ kann über reelle Methode erfolgen (siehe Übungen).

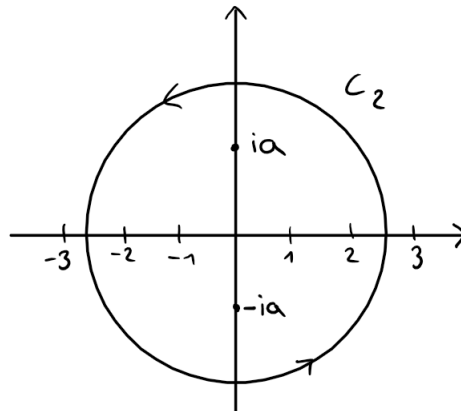
Die analytische Fortsetzung über (23.91) definiert $\zeta(z)$ auch für $\operatorname{Re} z < 1$, insbesondere findet man die “trivialen Nullstellen” bei $z = -2, -4, \dots$

23.6 Auswertung von Summen über den Residuensatz

Nutze aus, dass wir für die Funktion $\cot(\pi z)$ die Residuen bei den einfachen Polen bei $z = n \in \mathbb{Z}$ kennen:

$$\operatorname{Res}_{z=n} \pi \cot(\pi z) = \operatorname{Res}_{z=n} \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)'} = 1 \quad (23.92)$$

Betrachte Kontur $\mathcal{C}_N$ ($\mathcal{C}_N$: Kreis mit Radius $N + \frac{1}{2}$ um $z = 0$)



Betrachte:

$$\begin{aligned}
I_N &= \oint_{\mathcal{C}_N} dz f(z) \pi \cot(\pi z) \\
&= 2\pi i \sum_{n=-N}^N f(n) + 2\pi i \sum_j (\text{Residuen von } f(z) \pi \cot(\pi z) \\
&\quad \text{bei möglichen Singularitäten } z_j \text{ von } f) \\
&\quad z_j \notin \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{23.93}$$

mit: $\text{Res}_{z=n} \pi \cot(\pi z) = 1$

Falls $|z||f(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |I_N| \leq \max |f(z)| 2\pi |z| O(1) \rightarrow 0 \tag{23.94}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\cot(\pi z) &= i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \\
&= i \frac{e^{i\pi \text{Re } z} e^{-\pi \text{Im } z} + e^{-i\pi \text{Re } z} e^{\pi \text{Im } z}}{e^{i\pi \text{Re } z} e^{-\pi \text{Im } z} - e^{-i\pi \text{Re } z} e^{\pi \text{Im } z}}
\end{aligned} \tag{23.95}$$

$$\text{Re } z = R \cos \phi \quad R \rightarrow \infty \tag{23.96}$$

$$\text{Im } z = R \sin \phi \quad (\text{aber } R = N + \frac{1}{2}) \tag{23.97}$$

$$\phi \in [0, \pi] : \cot(\pi z) \approx i \frac{e^{\pi R \sin \phi}}{-e^{\pi R \sin \phi}} = -i \tag{23.98}$$

$$\phi \in [\pi, 2\pi] : \cot(\pi z) \approx i \frac{e^{-\pi R \sin \phi}}{e^{-\pi R \sin \phi}} = i \tag{23.99}$$

Da $R = N + \frac{1}{2}$ ist die potentielle Weghebung im Nenner irrelevant und $\pi \cot(\pi z) \approx O(1)$, somit hat man für $|z||f(z)| \rightarrow 0$ auch $|I_N| \rightarrow 0$

Für $N \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_j (\text{Residuen von } f(z)\pi \cot(\pi z) \text{ bei } z_j)} \quad (23.100)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} & a \neq 0; \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \rightarrow z_j = \pm ia \\ \rightarrow 2S + \frac{1}{a^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \\ &\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + a^2} \rightarrow 0 \\ &= - \left(\text{Res}_{ia} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2} + \text{Res}_{-ia} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2} \right) \\ &= - \left(\left. \frac{\pi \cot(\pi z)}{2z} \right|_{z=ia} + \left. \frac{\pi \cot(\pi z)}{2z} \right|_{z=-ia} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} - \frac{\pi(-i) \coth(\pi a)}{2ia} - \frac{\pi(+i) \coth(\pi a)}{-2ia} \\ &= \frac{\pi \coth(\pi a)}{a} \\ \rightarrow \boxed{S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \coth(\pi a)}{2a} - \frac{1}{2a^2}} \quad (23.101) \end{aligned}$$

(*):

$$\begin{aligned} \cot(ix) &= i \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -i \coth x \\ \coth(-x) &= -\coth x \end{aligned}$$

Analytische Fortsetzung zu $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow 0} S &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \coth(\pi a) - 1}{2a^2} \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \frac{1 + \frac{1}{2!}(\pi a)^2 + O(a^4)}{\pi a + \frac{1}{3!}(\pi a)^3 + O(a^5)} - 1}{2a^2} \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + \frac{(\pi a)^2}{2} + O(a^4)}{1 + \frac{(\pi a)^2}{6} + O(a^4)} - 1}{2a^2} \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{(\pi a)^2}{2} - \frac{(\pi a)^2}{6} + O(a^4) - 1}{2a^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \quad (23.102)$$

Ähnliche Formeln für $\pi \tan(\pi z)$ etc.

23.7 Schwarzsches Spiegelungsprinzip und Dispersionsrelationen

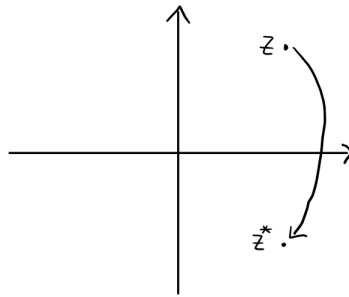
Schwarzsches Spiegelungsprinzip:

Sei $f(z)$ holomorph in einer Region, die einem Teil der reellen Achse umfasst, und reell wenn z reell, dann gilt:

$$f^*(z) = f(z^*) \quad (23.103)$$

Beweis: Sei x_0 ein Punkt auf der reellen Achse innerhalb des Bereichs, in dem $f(z)$ holomorph ist:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (23.104)$$

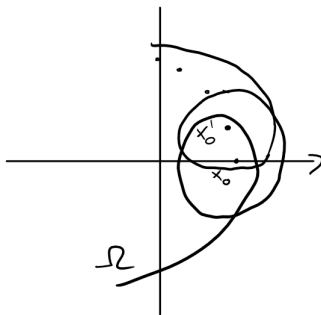


$f(z)$ ist reell für z reell $\rightarrow f^{(n)}(x_0)$ reell [betrachte Grenzwert auf der reellen Achse]

$$\rightarrow f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^* - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = f(z^*) \quad (23.105)$$

Die allgemeine Aussage folgt über analytische Fortsetzung

□



Argumentation wie bei Identitätssatz

Dispersionsrelation:

Sei $f(z)$ holomorph mit Ausnahme eines Schnittes auf der reellen Achse

$I = [x_0, \infty)$, also reell auf $R \setminus I$

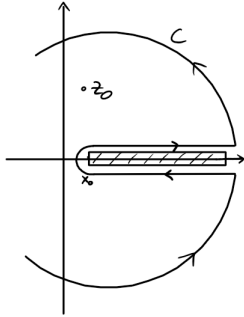
Ausserdem gelte $|f(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$

Dann gilt für $z_0 \notin I$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)}{x-z_0} = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z_0} \quad (23.106)$$

wobei $f(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x+i\epsilon)$

Beweis:



Satz von Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{f(z)}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon)}{x-z_0} \end{aligned}$$

denn:

$$\left| \int_{\text{semi-circle}} \right| \leq C \max |z| \frac{|f(z)|}{|z|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

Schwarzsches Spiegelungsprinzip:

$$\begin{aligned} f(x-i\epsilon) &= f((x+i\epsilon)^*) = (f(x+i\epsilon))^* \\ \rightarrow f(x+i\epsilon) - f(x-i\epsilon) &= \operatorname{Re} f(x+i\epsilon) + i\operatorname{Im} f(x+i\epsilon) - [\operatorname{Re} f(x+i\epsilon) - i\operatorname{Im} f(x+i\epsilon)] \\ &= 2i\operatorname{Im} f(x+i\epsilon) \equiv 2i\operatorname{Im} f(x) \\ \rightarrow f(z_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z_0} \end{aligned} \quad (23.107)$$

□

Insbesondere für $z_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(z_0) &\equiv f(z_0+i\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z_0-i\epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z_0} + i\operatorname{Im} f(z_0)\theta(z_0-x_0) \\ f(z_0) &= \operatorname{Re} f(z_0) + i\operatorname{Im} f(z_0)\theta(z_0-x_0) \end{aligned} \quad (23.108)$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - z_0}} \quad (23.109)$$

$\rightarrow \operatorname{Re} f(z_0)$ kann alleine aus dem Imaginärteil entlang des Schnitts rekonstruiert werden.

Beispiel

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} \quad (23.110)$$

$\rightarrow$ Schnitt bei $[-1, 1]$ mit $\operatorname{Im} Q_0(z) = \frac{1}{2i} (Q_0(z+i\epsilon) - Q_0(z-i\epsilon)) = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \rightarrow Q_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\operatorname{Im} Q_0(x)}{x-z} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{z-x} \\ Q_0(z) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{2} \log \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(1 + \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \right] = \frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] = \frac{1}{2} \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \rightarrow |Q_0(z)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (23.111)$$

Warum Dispersionsrelation?

Optik $\rightarrow$ Dispersion

Brechungsindex $n(\omega) = \frac{ck}{\omega}$

$n(\omega)$ wird komplex, wenn das Medium leitfähig ist $\rightarrow$ "Absorption"

$\rightarrow$ Kramers-Kronig Relation

$$\operatorname{Re}[n^2(\omega_0) - 1] = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty d\omega \omega \frac{\operatorname{Im}[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (23.112)$$

$$\operatorname{Im}[n^2(\omega_0) - 1] = -\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty d\omega \omega_0 \frac{\operatorname{Re}[n^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (23.113)$$

ANHANG

G Die δ -Funktion

Wie im ganzen Skript bedeutet das
Integralzeichen ohne Grenzen eine
Integration von $-\infty$ bis $+\infty$.

G.1 Elementare Definition

In Abschnitt 22.2 haben wir - als provisorische Definition - die δ -Funktion als Grenzwert einer *Folge von Funktionen* $\delta_n(x)$ ($n \rightarrow \infty$) mit folgenden Eigenschaften eingeführt:

$$\int dx \delta_n(x) = 1 \quad (\text{G.1})$$
$$\delta_n(x) = 0 \text{ ausserhalb } [0, \tau_n]; \quad \tau_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die zweite Eigenschaft kann abgeschwächt werden (siehe folgender Abschnitt). Symbolisch schreiben wir für (G.1)

$$\int dx \delta(x) = 1. \quad (\text{G.2})$$

$\delta(x - x')$ bedeutet (für einen festen Wert x') die δ -Funktion, deren Singularität an der Stelle $x = x'$ liegt.

G.2 Distributionen

Die Grundidee des Rechnens mit der δ -Funktion und verwandten Objekten ist bemerkenswert einfach.

- Man betrachtet die Menge $\mathcal{S}$ von Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die beliebig oft differenzierbar sind und im Unendlichen rascher als jede Potenz abfallen. Beispiele:

$$g_1(x) = e^{-x^2}; \quad g_2(x) = \frac{i}{1+x^2} e^{-4x^2}; \quad \dots g_i \in \mathcal{S} \quad (\text{G.3})$$

- Als nächstes untersucht man Abbildungen der Menge $\mathcal{S}$ in die komplexen Zahlen. Diese Abbildungen sollen linear sein:

$$f[\alpha g_1 + \beta g_2] = \alpha f[g_1] + \beta f[g_2]; \quad g_i \in \mathcal{S}. \quad (\text{G.4})$$

Beispiele: Sei $g \in \mathcal{S}$. Abbildungen mit den erwähnten Eigenschaften sind z.B.

$$f_1[g] = g(0), \quad (\text{G.5})$$

$$f_2[g] = g(x_0), \quad (\text{G.6})$$

$$f_3[g] = \int_0^\infty dx g(x). \quad (\text{G.7})$$

In Worten: Die Abbildung f_1 ordnet jeder Funktion g ihren Wert an der Stelle $x = 0$ zu. Die Abbildung f_3 ordnet jeder Funktion g das Integral $\int_0^\infty dx g(x)$ zu, etc. (Die eckige Klammer bezeichnet das Argument der Abbildung.)

Die Abbildungen $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ heissen *Distributionen*. Die δ -Funktion ist ein Beispiel einer Distribution. Es gilt der folgende wichtige

Satz: Sei f eine Distribution. Dann gibt es eine Folge f_n von unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Abbildung $f[g]$ erhalten werden kann als Grenzwert einer Folge von Integralen:

$$f[g] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx f_n(x) g(x), \quad \forall g \in \mathcal{S}. \quad (\text{G.8})$$

Wir illustrieren diesen Sachverhalt mit zwei Beispielen von Folgen δ_n mit der Eigenschaft, dass die Grenzwerte (G.8) die Distribution (G.5) reproduzieren.

Beispiel 1:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2 x^2/2}. \quad (\text{G.9})$$

Der Vorfaktor ist so gewählt, dass $\int dx \delta_n(x) = 1$, unabhängig von n . Für $n \rightarrow \infty$ wird die Funktion beliebig schmal und hoch. Die Gültigkeit von

$$f_1[g] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x) g(x) = g(0) \quad (\text{G.10})$$

leuchtet ein, siehe Figur unten. Der Beweis ist einfach: Man macht die Substitution $x = t/n$ im Integral und führt dann den limes $n \rightarrow \infty$ im Integranden aus.

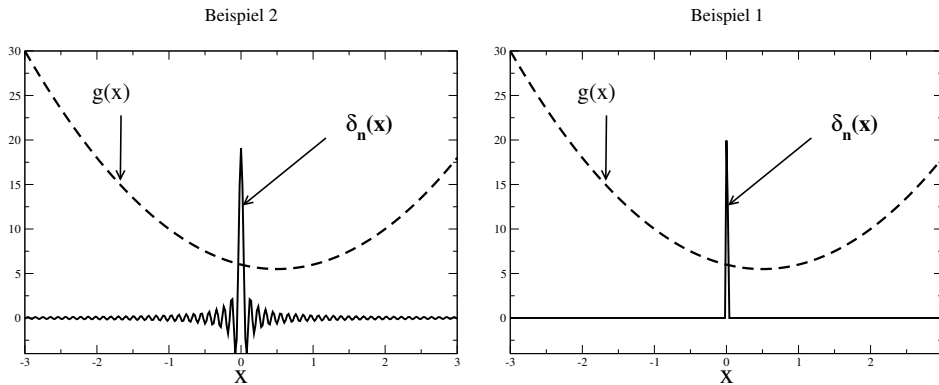
G.1 Übung

Führe den Beweis im Detail durch.

Beispiel 2:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} \quad (\text{G.11})$$

Wir geben keinen Beweis, dass diese Folge die Eigenschaft (G.10) aufweist; er wäre schwieriger als im vorangehenden Beispiel: $\delta_n(x)$ geht mit festen Werte von x für $n \rightarrow \infty$ nicht gegen Null. Dass (G.10) trotzdem gilt, liegt (intuitiv) an den beliebig schnellen Oszillationen, so dass sich in jedem festen Intervall $[x_1, x_2]$, welches den Wert $x = 0$ nicht enthält, die positiven und negativen Beiträge zum Integral in der Grenze $n \rightarrow \infty$ aufheben.



Figuren zu den beiden Beispielen. Fläche unter den Kurven= 1.

links: $\frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$, $n = 60$. Mit wachsendem n werden die Oszillationen dichter. Der Hauptbeitrag zum Integral über x stammt von wenigen Oszillationen in der Umgebung von $x = 0$.

rechts: $\frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 n^2/2}$, $n = 50$. Mit zunehmendem n wird die Funktion höher und schmaler.

Wegen der Eigenschaft (G.8) schreibt man nun symbolisch *jede* Distribution als Integral. Zum Beispiel für die oben angegebenen Distributionen:

$$f_1[g] = g(0) = \int dx \delta(x) g(x), \quad (\text{G.12})$$

$$f_2[g] = g(x_0) = \int dx \delta(x - x_0) g(x), \quad (\text{G.13})$$

$$f_3[g] = \int_0^\infty dx g(x) = \int dx \theta(x) g(x). \quad (\text{G.14})$$

Entsprechend spricht man dann von der δ -Funktion $\delta(x - x_0)$ und meint damit die Distribution (G.13).

G.3 Differentiation von Distributionen

Distributionen sind per Dekret unendlich oft differenzierbar. Dies erreicht man folgendermassen. Sei $f(x)$ differenzierbar. Dann findet man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int dx f'(x)g(x) &= f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int dx f(x)g'(x) \\ &= - \int dx f(x)g'(x) ; \quad g \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Hier haben wir benutzt, dass die Funktionen $g(x)$ im Unendlichen rasch abfallen und deshalb die Randterme bei der partiellen Integration wegfallen. Um dies auf Distributionen anzuwenden, greifen wir auf den Satz G.8 zurück, schreiben Distributionen als Integrale und definieren

$$\int dx f'(x)g(x) = - \int dx f(x)g'(x) ; \quad g \in \mathcal{S}, \quad (\text{G.16})$$

für jede Distribution. In Worten: Die Wirkung der Ableitung einer Distribution erhält man, indem man partiell integriert, als sei die Distribution eine gewöhnliche Funktion, und die Randterme weglässt. Beispiele:

$$\int dx \delta'(x)g(x) = - \int dx \delta(x)g'(x) = -g'(0), \quad (\text{G.17})$$

$$\begin{aligned} \int dx \theta'(x)g(x) &= - \int dx \theta(x)g'(x) \\ &= - \int_0^{\infty} dx g'(x) = -g(x)|_0^{\infty} = g(0). \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

Die Eigenschaft (G.18) wird auch als

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x) \quad (\text{G.19})$$

notiert.

G.4 Weitere Rechenregeln

Die folgenden Regeln lassen sich verstehen, indem man an Stelle der δ -Funktion auf Folgen δ_n zurückgeht und die Grenze $n \rightarrow \infty$ betrachtet. $y(x)$ bezeichne eine beliebige Funktion aus dem Raum $\mathcal{S}$.

R1

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (\text{G.20})$$

Dies bedeutet nicht, dass $\delta_n(x)$ symmetrisch sein muss, sondern

$$\int dx \delta(-x) y(x) = \int dx \delta(x) y(x) = y(0) . \quad (\text{G.21})$$

(Beweis durch Substitution der Integrationsvariablen: $s = -x$.)

R2

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0) \quad (\text{G.22})$$

Wiederum ist die gleiche Wirkung unter dem Integral gemeint:

$$\int dx \delta(ax) y(x) = \frac{1}{|a|} \int dx \delta(x) y(x) = \frac{1}{|a|} y(0) . \quad (\text{G.23})$$

(Beweis durch Substitution der Integrationsvariablen: $s = ax$; bei $a < 0$ die Vertauschung der Grenzen $\pm\infty$ beachten).

R3

Die folgende zusätzliche Rechenregel ist leicht zu beweisen:

$$\int dx \delta[a(x - x_1)] y(x) = \frac{1}{|a|} y(x_1) . \quad (\text{G.24})$$

R4

Eine Funktion $g(x)$ habe eine einzige Nullstelle: $g(x_1) = 0$. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\int dx \delta[g(x)] y(x) = \frac{1}{|g'(x_1)|} y(x_1) , \quad (\text{G.25})$$

wobei $g'(x_1)$ die Ableitung von g in der Nullstelle bezeichnet.

Zum Beweis: zum Resultat trägt nur eine beliebig kleine Umgebung von x_1 bei. In dieser ersetzen wir $g(x)$ durch die lineare Funktion $g'(x_1)(x - x_1)$ und wenden (G.24) an.

Die Verallgemeinerung von (G.25) auf Funktionen $g(x)$ mit beliebig vielen Nullstellen $g(x_k) = 0$ lautet offensichtlich

$$\int dx \delta[g(x)] y(x) = \sum_k \frac{1}{|g'(x_k)|} y(x_k) . \quad (\text{G.26})$$

R5

$$\delta(x) y(x) = \delta(x) y(0) \quad (\text{G.27})$$

G.4.1 Beweis der Dgl. (22.32)

Wir haben nun alles beisammen, um zu zeigen, dass die Greenfunktion $G(t)$ die Dgl. (22.32) erfüllt. Die Greenfunktion hat die Form

$$G(t) = \theta(t)h(t), \quad (\text{G.28})$$

wobei $h(t)$ die homogene Dgl.

$$\ddot{h}(t) + \gamma \dot{h} + \omega_0^2 h(t) = 0; \quad h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1 \quad (\text{G.29})$$

erfüllt. Die erste Ableitung lautet

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \dot{\theta}(t)h(t) + \theta(t)\dot{h}(t) \\ &= \delta(t)h(t) + \theta(t)\dot{h}(t) \\ &= \theta(t)\dot{h}(t) \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

Hier haben wir benutzt, dass $\delta(t)h(t) = \delta(t)h(0) = 0$ ist, siehe (G.27). Für die zweite Ableitung finden wir analog

$$\begin{aligned} \ddot{G}(t) &= \delta(t)\dot{h}(0) + \theta(t)\ddot{h}(t) \\ &= \delta(t) + \theta(t)\ddot{h}(t). \end{aligned} \quad (\text{G.31})$$

Insgesamt also

$$\ddot{G}(t) + \gamma \dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t), \quad (\text{G.32})$$

wie behauptet.

G.5 Mehrdimensionale δ -Funktionen

Betrachte eine elektrische Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ mit der totalen Ladung q

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) = q. \quad (\text{G.33})$$

Man stelle sich vor, die Ladung q sei in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes $\vec{x}'$ konzentriert (Punktladung). Eine solche Ladungsverteilung kann mit δ -Funktionen beschrieben werden:

$$\rho(\vec{x}) = q \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (\text{G.34})$$

Darin kommt die Konzentration der Ladung auf ein beliebig kleines Gebiet des Raumes zum Ausdruck, und auch die Normierung auf die Ladung q ist richtig notiert

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) = \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 q \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) = q . \quad (\text{G.35})$$

Abkürzend verwendet man das Symbol

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) . \quad (\text{G.36})$$

Als hauptsächliche Rechenregel gilt

$$\int d^3x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') y(\vec{x}) = y(\vec{x}') . \quad (\text{G.37})$$

G.6 Diverse Anmerkungen

In den physikalischen Anwendungen kommt die δ -Funktion letztlich immer unter einer Integration vor. Wir betrachten ein Beispiel aus der Elektrodynamik.

Eine statische elektrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$ erzeugt nach dem Coulombgesetz das elektrische Potential

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad (\text{G.38})$$

(der Beitrag der Ladung im Intervall d^3x' am Ort $\vec{x}'$ zum Potential am Ort $\vec{x}$ ist $d\phi(\vec{x}) = d^3x' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$).

Für die Ladungsverteilung $\rho_p(\vec{x}') = q \delta^{(3)}(\vec{x}')$ wird hieraus

$$\phi_p(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta^{(3)}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|} . \quad (\text{G.39})$$

Aus (G.38) folgt, dass das statische Potential die Differentialgleichung

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad (\text{G.40})$$

erfüllt, wobei Δ der Laplaceoperator ist. Das Potential (G.39) erfüllt also die Differentialgleichung

$$\Delta\phi_p(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{x}) , \quad \text{oder} \quad \Delta \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x}) . \quad (\text{G.41})$$

Besonders gut brauchbar werden δ -Funktionen, sobald man ihre Fourier-Darstellung beherrscht. Wir notieren noch einmal die δ -Folge

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx}. \quad (\text{G.42})$$

Die letzte Umformung ist elementar. Symbolisch

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}. \quad (\text{G.43})$$

Dies ist die *Fourier-Darstellung* der δ -Funktion. Beachte, dass das Integral als Riemann-Integral nicht existiert.

G.2 Übung

Berechne:

- a) $\int_0^4 dx \delta(x-1)$ b) $\int_0^4 dx \delta(x+1)$
 c) $\int dx \delta(2x+1)$ d) $\int dx \delta(1-2x)$

G.3 Übung

Berechne:

- a) $\int dx \delta(1-x^2) e^{-x}$ b) $\int dx \delta'(x-1) e^{-x}$
 c) $\int dx \int dy \delta(x+y) \delta(x-y) h(x,y)$
 d) $\int d^3x \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) e^{-\vec{x}^2}$

G.4 Übung

Löse die Differentialgleichungen (x_1, a sind gegebene Konstanten):

- a) $y'(x) = \delta(x-x_1)$; $y(-\infty) = 0$
 b) $y''(x) = \delta(x-x_1) e^x$; $y(-\infty) = 0$, $y'(-\infty) = 0$
 c) $y''(x) = -y(x) + a \delta(x-x_1)$; $y(-\infty) = 0$, $y'(-\infty) = 0$
 d) Gibt es eine symmetrische Lösung der Gleichung $y''(x) = \delta(x)$?

G.5 Übung

r, ϑ, φ bezeichnen Kugelkoordinaten. Kommentiere die Ladungsverteilung $\rho(r, \vartheta, \varphi) = a \delta(r-r_1)$. a und r_1 sind gegebene Konstanten. Totale Ladung ? (Elektrisches Feld ? Potential ?)

Literatur

- S. Grossmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik. Teubner Studienbücher. Teubner, Stuttgart (1991). *Kap. 4.6.*
(Elementar)
- G. Süssmann, Einführung in die Quantenmechanik. Bibliographisches Institut, Mannheim (1963). *Anhang A: Die wichtigsten Distributionen.*
(Kurz, sehr brauchbar als Einführung)

- I.M. Gel'fand und G.E. Shilov, Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) Band I.
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1960).
(Mathematisch, Standardreferenz)