

1. Ein Körper der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_G = (0, 0, -mg)$ in einer Kugelschale mit Radius R_0 .
 - (a) Finde verallgemeinerte Koordinaten und gib die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ des Systems an.
 - (b) Leite die Bewegungsgleichung her.

2. Betrachte eine schiefe Ebene, deren Winkel proportional zur Zeit anwächst $\alpha = \omega t$ (also etwa einen Kipper beim Ausladen) und einen Massenpunkt der Masse m , der unter dem Einfluss der Schwerkraft diese Ebene reibungsfrei herunterrutscht.
 - (a) Führe als verallgemeinerte Koordinate die zurückgelegte Strecke $s(t)$ entlang der Ebene ein und berechne die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$.
 - (b) Leite die Bewegungsgleichung her.
 - (c) Die Bewegungsgleichung ist eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Zeige, dass $s(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.
 - (d) Bestimme die Lösung zu den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.

3. Betrachte einen starren Körper aus drei Massenpunkten, deren Abstände Δ_{12} , Δ_{23} , Δ_{13} fest sind.
 - (a) Was sind die zugehörigen Zwangsbedingungen?
 - (b) Wieviele Freiheitsgrade hat dieses System und was ist deren Bedeutung?
 - (c) Wie sieht es bei einem starren Körper mit N Massenpunkten aus? Anzahl Zwangsbedingungen? Anzahl Freiheitsgrade?

4. Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F}_G = mg(0, -1)$ in der x - y -Ebene auf der Parabel $y = \kappa x^2$
 - (a) Formuliere die Zwangsbedingung $g(x, y) = 0$
 - (b) Stelle die Lagrange Gleichungen 1. Art auf.
 - (c) Bestimme den Lagrange Multiplikator $\lambda(t)$ als Funktion von Ort und Geschwindigkeit, aus der Bedingung $\ddot{g}(x, y) = 0$ und den Bewegungsgleichungen. Eliminiere damit $\lambda(t)$ aus den Bewegungsgleichungen.

5. Betrachte die gleiche Situation, wie in der vorherigen Aufgabe. Wähle die verallgemeinerte Koordinate q gleich der x -Komponente: $x = q$ und $y = \kappa q^2$.
- (a) Gib die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ an.
 - (b) Leite die Bewegungsgleichung für $q(t)$ her. Vergleiche mit (4c).
 - (c) Betrachte kleine Auslenkungen $q(t) \ll 1/\kappa$ und kleines $\dot{q}(t) \ll \sqrt{g/\kappa}$. Entwickle die Gleichung im entsprechenden Limes und zeige, dass sich die Bewegungsgleichung dann auf diejenige eines harmonischen Oszillators reduziert. Was ist die zugehörige Federkonstante?
6. Betrachte ein freies Teilchen der Masse m in einem rotierenden Bezugssystem. Berechne mithilfe einer Koordinatentransformation die Lagrangefunktion in einem nicht-rotierenden Inertialsystem und leite daraus Ausdrücke für die Coriolis- und die Zentrifugalkraft her.