Mechanik II — Serie 4

Lagrangeformalismus — 31. März 2022

1. Eine Perle gleitet reibungsfrei und ohne angewandten Kräfte auf einem Stab, der mit einem Ende im Ursprung fixiert ist und sich in der xy-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht.

   (a) Stelle die Bewegungsgleichung mithilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Benütze dazu Zylinderkoordinaten. Löse die Bewegungsgleichung und bestimme die Zwangskraft. Ist die Energie erhalten?

   (b) Verwende nun die Lagrange-Gleichungen zweiter Art, um die Bewegungsgleichung aufzustellen. Wie steht es um die Energieerhaltung?

2. Eine Punktmasse m_1 ist durch zwei gleiche Federn mit Federkonstanten $k/2$ zwischen zwei Wänden eingespannt und kann sich nur horizontal in x-Richtung entlang der Federn bewegen. Eine zweite Punktmasse m_2 ist mit einem masselosen Faden der Länge ℓ an m_1 befestigt und bewegt sich nur in der xz-Ebene unter dem Einfluss der homogenen Gravitationskraft $m_2\, g$ in z-Richtung.

   (a) Wähle geeignete verallgemeinerte Koordinaten und stelle die Lagrangefunktion auf.

   (b) Leite die Bewegungsgleichungen her.

   (c) Zeige, dass das System für kleine Auslenkungen äquivalent zu einem normalen Pendel mit Länge $\tilde{\ell}$ ist, und bestimme $\tilde{\ell}$.

3. Ein homogenes Seil der Länge L mit linearer Massendichte μ liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über die Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen, worauf es reibungsfrei vom Tisch gleitet.

   (a) Bestimme die Lagrangefunktion und leite die Bewgungsgleichung her.

   (b) Bestimme die Lösung für die obigen Anfangsbedingungen.

4. In der Vorlesung wurde angegeben, dass die kinetische Energie $T(q,t)$ in verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_f)$ die Form

$$T(q,t) = \sum_{i,k=1}^{f} a_{ik}(q,t)\dot{q}_i\,\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{f} b_k(q,t)\dot{q}_k + c(q,t)$$

hat. Leite einen Ausdruck für die Koeffizienten $a_{ik}(q,t)$, $b_k(q,t)$ und $c(q,t)$ her, ausgehend von der kinetischen Energie

$$T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \tag{1}$$

in kartesischen Koordinaten und den Beziehungen $x_n(q,t) = x_n(q_1, \ldots, q_f, t)$. Leite dazu zunächst einen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\dot{x}_n(q, \dot{q}, t)$ her und setze diesen in (1) ein. Unter welchen Umständen verschwindet der Koeffizient $c(q,t)$?

5. Koordinatenwechsel. Beim Aufstellen der Lagrangefunktion führt man verallgemeinerte Koordinaten q_i $(i = 1, \ldots, f)$ ein. Die Wahl dieser Koordinaten ist nicht eindeutig. Betrachte einen Koordinatenwechsel zu neuen Koordinaten Q_i $(i = 1, \ldots, f)$:

$$q_i = q_i(Q_1, \ldots, Q_f, t) \qquad \text{oder umgekehrt} \qquad Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_f, t)\,.$$

Nimm die Lagrangefunktion $\mathcal{L}^*(Q, \dot{Q}, t)$ und zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichung in den neuen Koordinaten,

$$\frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{Q}_i} = 0\,,$$

durch Koordinatenwechsel aus derjenigen für die Originalkoordinaten folgt

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, f) \ \rightarrow \ \frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_k} = 0 \ (k = 1, \ldots, f)\,.$$

Hinweise: Der Koordinatenwechsel und damit auch die Matrix $\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}$ sind invertierbar. Zeige und verwende, dass $\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$.