Mechanik II — Serie 5

Symmetrien, erhaltene Grössen und Noether-Theorem — 7. April 2022

1. Betrachte ein Teilchen im kugelsymmetrischen Potential $U(r)$, mit $r = |\vec{r}|$.

   (a) Leite die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) her. (Der Winkel ϕ sei der Winkel in der x-y-Ebene, θ der Winkel des Ortsvektors zur z-Achse.)

   (b) Zeige, dass ϕ eine zyklische Koordinate ist und gib die zugehörige Erhaltungsgrösse an.

   (c) Leite die Bewegungsgleichungen her.

2. Betrachte zwei Massen $m_1 = m_2 = m$, die durch eine Feder miteinander verbunden sind und sich in der x-y-Ebene bewegen können. Wähle als verallgemeinerte Koordinaten den Abstand der zwei Massen $\vec{r} = r(\cos\phi, \sin\phi)$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$. Der Betrag der Kraft, welche die Feder ausübt sei $|\vec{F}| = k\,r$.

   (a) Stelle die Lagrangefunktion auf. Bestimme dazu zunächst das Potential zur Kraft $\vec{F}$.

   (b) Zeige, dass die Schwerpunktskoordinaten R_i sowie der Winkel ϕ zyklisch sind und gib die dazugehörigen erhaltenen Grössen an.

   (c) Nimm an, dass die verallgemeinerten, erhaltenen Impulse die Werte $p_\phi = p_0$ und $p_{R_i} = P_i$ haben, wobei p_0 und $\vec{P}$ gegeben seien.

   (d) Gib einen Ausdruck für die erhaltene Energie E als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten an. Eliminiere aus diesem Ausdruck $\dot{\phi}$ und $\dot{R}_i$ mittels der Erhaltungsgrössen aus Aufgabe (2c). Die resultierende Gleichung $E(\dot{r}, r) = E_0$ ist eine Differenzialgleichung 1. Ordnung für $\dot{r}$. (Eine Lösung wird nicht verlangt.)

3. Ein Teilchen der Ladung q im homogenen elektrischen Feld $\vec{E}_0$ kann durch die Lagrangefunktion
$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$
beschrieben werden.

   (a) Das System (aber nicht $\mathcal{L}$) ist invariant unter Translationen. Was sind die erhaltenen Grössen?

   (b) Löse die Euler-Lagrange Gleichungen und verifiziere, dass die Grössen, die unter (a) hergeleitet wurden, in der Tat erhalten sind.

4. Zeige, dass die Wirkung eines Teilchens im Potential $U(\vec{r}) = \alpha/\vec{r}^2$ invariant ist unter der Transformation

$$\vec{r} \to \vec{r}^* = \lambda\,\vec{r}\,, \qquad\qquad t \to t^* = \lambda^2\,t\,.$$

Was ist die zugehörige Erhaltungsgrösse und was ist deren Bedeutung?

5. Betrachte die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2}M\,\dot{\vec{y}}^2 - V(|\vec{x}-\vec{y}|)$.

   (a) Zeige, dass $\mathcal{L}$ *nicht* invariant ist unter $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}\,t$, $\vec{y} \to \vec{y} + \vec{v}\,t$, wobei $\vec{v}$ ein konstanter Vektor ist. Interpretation dieser Transformation?

   (b) Betrachte eine infinitesimale Transformation $\vec{v} = \epsilon\,\vec{a}$ und zeige, dass sich die Änderung von $\mathcal{L}$ unter der Transformation als totale Zeitableitung einer Funktion der Koordinaten schreiben lässt. Deshalb gilt, trotz (a), ein Erhaltungssatz. Benutze die Verallgemeinerung des Theorems von Noether um die zugehörige erhaltene Grösse zu finden.

6. In geeigneten Einheiten lautet die Lagrangefunktion eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{r}}^2 - \vec{r}^2\right), \qquad \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,.\vec{e}_i$$

   (a) Zeige, dass die Transformation

$$x_i' = x_i + \frac{\epsilon}{2}(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k), \quad k,l \in \{1,2,3\}\,,$$

   die Wirkung invariant lässt.

   (b) Bestimme die zugehörigen Noether-Ströme J_{kl} und zeige, dass die Energieerhaltung darin enthalten ist.

   (c) Welches sind die anderen Erhaltungsgrössen?