Mechanik II — Serie 6

Noether-Theorem, Trägheitstensor — 28. April 2022

1. Allgemeine Herleitung des Noether-Theorems:
   Betrachte die gleichzeitige Transformation

$$
\begin{aligned}
t \to t' &= t + \epsilon \cdot X(t)\,, \\
q_i(t) \to q_i'(t') &= q_i(t) + \epsilon \cdot Q_i(t)\,,
\end{aligned}
$$

   wobei $\epsilon \ll 1$ und X, Q_i die Generatoren der Transformation sind. Falls die Wirkung unter dieser Transformation (bis auf Randterme) invariant ist,

$$
\begin{aligned}
S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'), t') &= S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{df}{dt} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) + \frac{df}{dt} \right\}\,,
\end{aligned}
$$

   dann ist

$$
J = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \cdot X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i + f
$$

   eine erhaltene Grösse. Beweise dies gemäss der in der Vorlesung gegebenen Anleitung.

2. Benutze die Komponentenschreibweise

$$
\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i\, b_i\,, \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k\,, \tag{1}
$$

   um die folgenden Relationen zu beweisen

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\,, \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}\,, \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) &= \vec{B}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right) - \vec{A}(\vec{r}) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \right)\,, \\
\mathrm{tr}\, (\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{O}) &= \mathrm{tr}\, (\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N})
\end{aligned}
$$

   wobei $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{O}$ 3×3 Matrizen sind. Benutze, dabei wie in (**??**) die Einsteinsche Summenkonvention: Repetierte Indizes werden automatisch summiert. Erinnere Dich an die folgende Relation

$$
\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}\,.
$$

3. Der Schwerpunkt einer kontinuierlichen Massenverteilung ist

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}\,,$$

wobei M die Masse des Körpers ist. Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kegels $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ mit Grundfläche A und Höhe h.

4. Der Trägheitstensor einer kontinuierlichen Massenverteilung lautet

$$\Theta_{ik} = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^2\, \delta_{ik} - r_i\, r_k \right) \,.$$

Der Tensor wird im körperfesten System berechnet und als Ursprung $\vec{r} = 0$ wird üblicherweise der Schwerpunkt verwendet.

Betrachte den Kegel aus der vorherigen Aufgabe und lege die z-Achse in die Mitte des Kegels (die Achse geht also durch den Schwerpunkt und die Kegelspitze). Berechne die Komponente Θ_{zz} des Trägheitstensors.

5. Betrachte einen Quader mit Seitenlängen a, b und c.

   (a) Berechne den Trägheitstensor Θ_{ij} (wie üblich im körperfesten System und bezüglich des Schwerpunkts). In welche Richtungen zeigen die Hauptachsen?

   (b) Was ist die kinetische Energie T_{rot} und der Drehimpuls $\vec{L}$ für eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = |\vec{\omega}|$ um eine Achse durch den Schwerpunkt und eine Ecke des Quaders? Ist der Drehimpuls bei dieser Rotation erhalten?

6. Satz von Steiner. Der Trägheitstensor eines Körpers für Rotationen um den Schwerpunkt sei Θ_{ij}. Betrachte nun eine Rotation um einen anderen Punkt O', der vom Schwerpunkt um $\vec{a}$ verschoben sei. Zeige, dass der Trägheitstensor Θ'_{ij} für Rotationen um O' durch

$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + M \left(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i\, a_j \right)$$

gegeben ist.

7. Betrachte einen Zylinder (Radius R, homogen, Masse M) der eine schiefe Ebene mit Winkel α herunterrollt.

   (a) Berechne das Trägheitmoment des Zylinder zur relevanten Drehachse.

   (b) Stelle die Lagrangefunktion auf. Nimm die zurückgelegte Strecke $s(t)$ als Koordinate.

   (c) Leite damit die Bewegungsgleichung her und löse diese.