Mechanik II — Serie 7

Eulerwinkel und Euler-Gleichungen — 5. Mai 2022

1. Nimm an, dass die Basis-Vektoren $\vec{e}_i^{\,\prime}(t)$ im körperfesten System durch

$$\vec{e}_1^{\,\prime}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2^{\,\prime}(t) = -\sin(\omega t)\vec{e}_1 + \cos(\omega t)\vec{e}_2, \quad \vec{e}_3^{\,\prime}(t) = \vec{e}_3,$$

gegeben seien, wobei die $\vec{e}_i$ fest sind.

   (a) Verifiziere, dass diese Wahl

$$\vec{e}_i^{\,\prime} \times \vec{e}_j^{\,\prime} = \epsilon_{ijk}\vec{e}_k^{\,\prime}, \qquad\qquad \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_k^{\,\prime} = \delta_{ik},$$

   erfüllt.

   (b) Bestimme $\vec{\omega}$, sowohl durch Nachdenken, als auch durch explizites Berechnen der Komponenten mittels

$$\omega_k' = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\dot{\vec{e}}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j^{\,\prime}$$

   Zeige, dass die Basisvektoren die Relation $\dot{\vec{e}}_i^{\,\prime} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i^{\,\prime}$ erfüllen.

   (c) Was sind die zugehörigen Eulerwinkel $\phi(t)$, $\theta(t)$ und $\psi(t)$?

2. Nimm an, dass sich ein Körpers so dreht, dass die Eulerwinkel durch

$$\phi(t) = 0 \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \theta(t) = \psi(t) = \alpha\, t$$

gegeben sind.

   (a) Wie lauten die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}$ im Körperfesten System? Ist die Drehgeschwindigkeit konstant? Wie verhält sich die Drehachse?

   (b) Wie lauten die Komponenten von $\vec{\omega}$ im Inertialsystem?

3. Herleitung der Eulergleichungen aus $\mathcal{L}$. Der Lagrangian für einen freien Kreisel lautet

$$\mathcal{L} = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta_{ij}\,\omega_i'\,\omega_j'\,,$$

wobei ω_i' die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System sind:

$$\begin{aligned}
\omega_1' &= \dot{\phi}\,\sin\theta\,\sin\psi + \dot{\theta}\,\cos\psi \\
\omega_2' &= \dot{\phi}\,\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\,\sin\psi \\
\omega_3' &= \dot{\phi}\,\cos\theta + \dot{\psi}\,.
\end{aligned}$$

Zeige, dass die Bewegungsgleichung für $\psi(t)$ die Eulergleichung

$$\Theta_3\,\dot{\omega}_3' + (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1'\omega_2' = 0$$

liefert.

Hinweis: Benutze, dass $\mathcal{L}$ nur indirekt von den Eulerwinkeln abhängt und schreibe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i'} \frac{\partial \omega_i'}{\partial \psi}\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i'} \frac{\partial \omega_i'}{\partial \dot{\psi}}\,.$$

Die Ableitungen $\frac{\partial \omega_i'}{\partial \psi}$ und $\frac{\partial \omega_i'}{\partial \dot{\psi}}$ lassen sich wieder durch die Grössen ω_i' ausdrücken.