Mechanik II — Serie 9

Hamiltonformalismus, Poissonklammer — 19. Mai 2022

1. Betrachte eine schiefe Ebene, deren Winkel $\alpha = \omega t$ proportional zur Zeit anwächst und eine Masse m, die unter dem Einfluss der Schwerkraft diese Ebene reibungsfrei herunterrutscht. In Serie 2 haben wir die zugehörige Lagrangefunktion bestimmt:

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\omega^2) - mgs\sin(\omega t)\,,$$

   wobei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke ist.

   (a) Bestimme den Hamiltonian. Wie lauten die kanonischen Gleichungen?

   (b) Ist der Hamiltonian $\mathcal{H}$ gleich der Energie E?

   (c) Setze $g = 0$ und betrachte das Problem ohne Schwerkraft. Ist der Hamiltonian oder die Energie erhalten?

2. In der Vorlesung haben wir überprüft, dass

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q\,\phi(\vec{r}, t)$$

   die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im elektromagentischen Feld liefert. Bestimme die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ zu diesem Lagrangian.

3. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \qquad\qquad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

   aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

   folgen. Leite nun umgekehrt die Euler-Lagrange Gleichungen aus den kanonischen Gleichungen her, um zu beweisen, dass die beiden equivalent sind.

4. Poissonklammern

   (a) Berechne $\{q_i, p_j^4\}$

   (b) Betrachte $A \equiv A(p, q)$ und $B \equiv B(p, q)$. Zeige, dass

$$\{A, H\} = 0 \;\text{ und }\; \{B, H\} = 0 \;\rightarrow\; \{\{A, B\}, H\} = 0\,.$$

   D.h. auch $\{A, B\}$ ist eine erhaltene Grösse. *Hinweis:* Die Poisson-Klammer erfüllt die Jakobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0\,.$$

(c) Kartesische Koordinaten $\vec{r}$. Berechne die Poissonklammer $\{r_i, L_j\}$, wobei $\vec{L}$ der Drehimpulsvektor ist.

5. Gegeben sei die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \kappa\, p_1 q_2 + p_2^2\right) - \frac{m\omega^2}{2} q_2^2\,.$$

   (a) Was ist die zugörige Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q,\dot{q})$?

   (b) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen?

   (c) Was sind die erhaltenen Grössen?

6. Betrachte die Funktion $f(u) = u^2\,(1 + u/3)$ für $u > 0$.

   (a) Berechne die zugehörige Legendre Transformierte $g(p)$, mit $p = \frac{\partial f}{\partial u}$.

   (b) Berechne danach die Legendre Transformierte der Funktion $g(p)$ und verifiziere, dass bei dieser zweiten Transformation wieder die ursprüngliche Funktion f herauskommt.