

1. Brachistochrone. Betrachte eine Rutschbahn $y(x)$, deren Anfangs- und Endpunkt gegeben sind, $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$. Die Rutschbahn sei reibungsfrei und im homogenen Gravitationsfeld.

- (a) Berechne die Zeit $T[y]$, die es dauert herunterzurutschen, für eine gegebene Form $y(x)$ der Rutsche. Die Zeit $T[y]$ kann man mittels

$$T[y] = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_0^s \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx L(y, y')$$

berechnen. Der Wert der Geschwindigkeit folgt aus der Energieerhaltung.

Lösung: Aus der Energieerhaltung folgt die Geschwindigkeit

$$\frac{m}{2}v^2 = mg(y_1 - y) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(y_1 - y)}.$$

Somit ergibt sich die Zeit $T[y]$

$$T[y] = \int_0^s \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_1 - y)}}$$

Beachte hierbei, dass der infinitesimale Streckenabschnitt auf der Kurve gegeben ist als $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Somit ergibt sich

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_1 - y)}}. \quad (1)$$

- (b) Leite die Euler-Lagrange Gleichungen zu $T[y]$ her.

Lösung: Die Euler-Lagrange Gleichungen zu $T[y]$ ergeben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{(y_1 - y)(1 + y'^2)}} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{(y_1 - y)^3}}. \end{aligned}$$

- (c) Aus der Tatsache, dass $L(y, y')$ nicht von x abhängt, folgt der Erhaltungssatz

$$L - \frac{\partial L}{\partial y'} y' = C = \text{const.} \quad (2)$$

Zeige, dass die Parameterdarstellung

$$x = A(\phi - \sin \phi), \quad y = b - A(1 - \cos \phi),$$

für geeignete Werte von A und b die Gleichung (2) löst. In welchem Bereich soll ϕ variiert werden?

Lösung: Aus Gleichung (1) und (2) folgt

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_1-y)}} - \frac{y'}{\sqrt{2g(y_1-y)(1+y'^2)}} y' = \frac{1}{\sqrt{2g(y_1-y)(1+y'^2)}} = C, \quad (3)$$

beziehungsweise

$$(y_1 - y)(1 + y'^2) = \frac{1}{2gC^2}. \quad (4)$$

Mit der gegebenen Parametrisierung folgt dann

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\phi} \left(\frac{dx}{d\phi} \right)^{-1} = -\frac{\sin(\phi)}{1 - \cos(\phi)}.$$

Einsetzen in Gleichung (4) führt dann zu

$$(y_1 - b + A(1 - \cos(\phi))) \frac{2}{1 - \cos(\phi)} = \frac{1}{2gC^2}. \quad (5)$$

Wir sehen also, dass diese Parameterdarstellung die Gleichung (2) für Werte

$$b = y_1 \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{4gC^2}$$

löst. Man sieht auch direkt, dass die angegebene Lösung

$$\vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} A(\phi - \sin(\phi)) \\ y_1 - A(1 - \cos(\phi)) \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit $A = \frac{1}{4gC^2}$ eine Zyklode parametrisiert. Unsere Kurve hat Startpunkt (x_1, y_1) und Endpunkt (x_2, y_2) . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $x_1 = 0, y_2 = 0$ (man verschiebt einfach das Koordinatensystem entsprechend). Die Anfangsbedingung ist damit gerade erfüllt

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Bei Betrachtung dieser parametrisierten Kurve sieht man, dass das Minimum bei $\phi = \pi$ angenommen wird, nämlich bei

$$\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} A\pi \\ y_1 - 2A \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Wenn dieses Minimum innerhalb des Intervalls $[0, x_2]$ angenommen wird, so muss die Zyklode über das Minimum hinaus fortgesetzt werden. In dem Fall liegt der Endpunkt höher als das Minimum.

Wir nehmen an, dass der Endpunkt für ein $\phi_2 \in [0, 2\pi]$ erreicht wird, so erhält man die Gleichungen

$$\vec{x}(\phi_2) = \begin{pmatrix} A(\phi_2 - \sin(\phi_2)) \\ y_1 - A(1 - \cos(\phi_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Dies sind nun zwei Gleichungen für zwei Unbekannte (ϕ_2 und A), welche numerisch gelöst werden können, als Funktion von x_2 und y_1 . Durch Umschreiben erhält man folgende Gleichung

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{\phi_2 - \sin(\phi_2)}{1 - \cos(\phi_2)}. \quad (10)$$

An diesem Punkt können wir drei verschiedene Fälle betrachten. Für den Fall $\frac{x_2}{y_1} = \frac{\pi}{2}$ sieht man direkt, dass $\phi_2 = \pi$. Dies entspricht der Situation, bei der das Minimum der Zyklode gerade mit dem Endpunkt der Brachistochrone zusammenfällt. Nehmen wir hingegen $\frac{x_2}{y_1} < \frac{\pi}{2}$ an, so kann man zeigen, dass ϕ_2 im Intervall $[0, \pi)$ angenommen wird, d.h. noch vor dem Minimum der Zyklode. Für $\frac{x_2}{y_1} > \frac{\pi}{2}$ gilt schliesslich $\phi_2 \in (\pi, 2\pi]$, d.h. der Endpunkt der Brachistochrone wird erst nach Durchgang des Minimums der Zyklode erreicht. Die drei Fälle sind in Abbildung 1 illustriert.

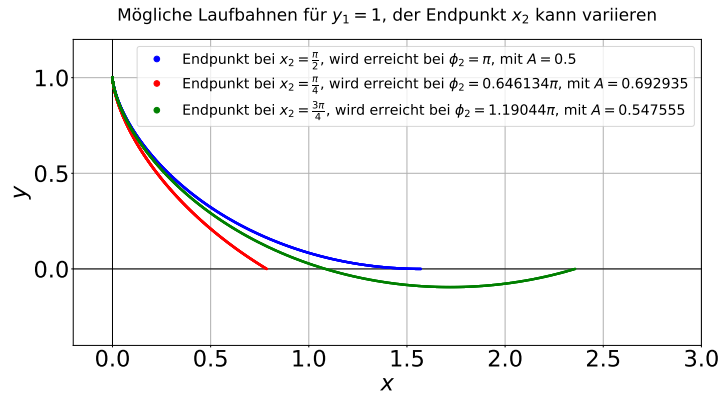


Abbildung 1: Plots der möglichen Szenarien

2. Höhere Ableitungen. Betrachte ein Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', y''), \quad (11)$$

welches auch von der zweiten Ableitung y'' abhängt. Die Randwerte $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$, sowie $y'(x_1) = v_1$ und $y'(x_2) = v_2$ sind vorgegeben.

Betrachte wie in der Vorlesung eine kleine Variation $y(x) = \bar{y}(x) + \epsilon \eta(x)$ um ein

Minimum $\bar{y}(x)$ des Funktional. Zeige, dass aus der Bedingung

$$\left. \frac{dJ[y]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

folgt, dass das Minimum die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0$$

erfüllen muss. Legen die Randbedingungen in diesem Fall die Lösung eindeutig fest?

Lösung:

$$J[\bar{y} + \epsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(\bar{y} + \epsilon\eta, \bar{y}' + \epsilon\eta', \bar{y}'' + \epsilon\eta'')$$

Entwickeln um $\epsilon = 0$ und weglassen höherer Ordnungen $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ führt zu

$$J[\bar{y} + \epsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F(\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \epsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \epsilon\eta' + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \epsilon\eta'' \right).$$

Nun benützen wir, dass die Variation von J verschwindet,

$$0 = \left(\frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \eta'' \right) \\ \stackrel{\text{p.I.}}{=} \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} + \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \eta' \right|_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \right) \eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \right) \eta,$$

wobei im zweiten Schritt zwei mal partiell integriert (p.I.) wurde. Wir verwenden, dass η durch

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = \eta'(x_1) = \eta'(x_2) = 0$$

eingeschränkt ist, somit verschwinden alle Ausdrücke vor dem Integral. Weiter gilt die obige Gleichung für beliebige η und somit muss das Minimum folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} = 0.$$

3. Seifenhaut zwischen zwei Ringen mit Radius r bei $x = \pm d$. Die Fläche einer Seifenhaut, die zwischen zwei Ringen aufgespannt ist und durch die Kurve $y(x)$ beschrieben ist, erhält man als

$$A[y] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} dx y \sqrt{1 + (y')^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx L(y, y'). \quad (12)$$

Aufgrund der Oberflächenspannung, zieht sich die Seifenhaut so zusammen, dass die Oberfläche minimiert wird.

- (a) Berechne die Kurve $y(x)$ als Funktion des Abstandes $2d$ zwischen den Ringen. Statt direkt die Euler-Lagrange Gleichung zu lösen ist es leichter den Erhaltungssatz (2) zu benutzen.

Lösung: Die Funktion F ist gegeben durch

$$L(y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Zur Berechnung der Kurve verwenden wir den Erhaltungssatz (2), woraus folgt

$$2\pi \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{(c_1 y)^2 - 1},$$

wobei $c_1 = 2\pi/C$ definiert wurde. Diese Differentialgleichung lässt sich einfach durch Trennung der Variablen lösen,

$$\begin{aligned} \int dy \frac{1}{\sqrt{(c_1 y)^2 - 1}} &= \int dx \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{c_1} \operatorname{arcosh}(c_1 y) &= x + c_2 \quad \Rightarrow \\ y(x) &= \frac{1}{c_1} \cosh(c_1(x + c_2)), \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Aus der Bedingung $y(-d) = y(d)$ folgt, dass $c_2 = 0$. Weiter folgt dann aus $y(d) = r$, dass

$$r c_1 = \cosh(c_1 d). \quad (13)$$

Diese Gleichung sollte nach c_1 aufgelöst werden. Jedoch ist dies nur numerisch möglich und wie wir sehen werden, existiert nicht für alle r und d eine Lösung. Geometrisch bedeutet die linke Seite dieser Gleichung eine Gerade G durch den Nullpunkt mit Steigung r , und die rechte Seite einen Graphen zur Funktion $f(c) = \cosh(cd)$. In Abbildung 2 sind mögliche Fälle für verschiedene Werte d/r dargestellt.

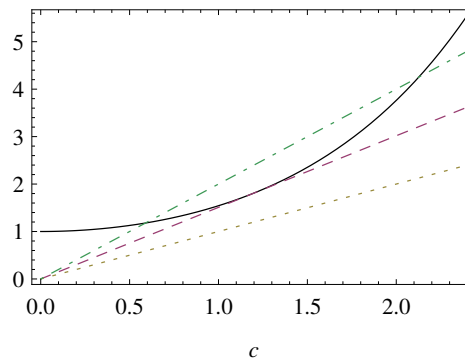


Abbildung 2: In schwarz der Graph der Funktion f und farbig die Gerade G für verschiedene Werte von d/r . Man erkennt gut, dass es keinen, einen oder zwei Schnittpunkte geben kann.

- (b) Wenn man die Ringe zu weit auseinander zieht, gibt es irgendwann keine Lösung mehr. Bei welchem Wert von d/r ist dies der Fall? (Der Wert lässt sich nur numerisch bestimmen.)

Lösung: Gleichung (13) kann nur erfüllt sein, wenn ein Schnittpunkt zwischen den beiden Graphen existiert. Ein Schnittpunkt existiert gerade dann noch, wenn die Gerade G eine Tangente an $f(c)$ bildet (sich die beiden also genau noch in einem Punkt berühren). In diesem Fall muss die Steigung r der Geraden der Ableitung von f am Schnittpunkt c_1 entsprechen. Daraus folgt

$$r = d \sinh(c_1 d). \quad (14)$$

Aus den beiden Gleichungen (13) und (14) kann man dann die Konstante c_1 extrahieren. Wir verwenden dazu die Relation ($\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$), wir quadrieren also die beiden Gleichungen und subtrahieren dann die eine von der anderen. Daraus folgt

$$(rc_1)^2 - \left(\frac{r}{d}\right)^2 = \cosh^2(c_1 d) - \sinh^2(c_1 d) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{d}\right)^2 + 1}.$$

Wir können nun einfach diesen Wert für c_1 in (14) einsetzen und erhalten eine Bedingung für d/r

$$\frac{r}{d} = \sinh\left(\frac{d}{r} \sqrt{\left(\frac{r}{d}\right)^2 + 1}\right) = \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 1}\right).$$

Diese Gleichung lässt sich nur numerisch lösen, die Lösung ist

$$\frac{d}{r} = 0.663.$$

Wir erinnern uns, dass wir gerade den Grenzfall betrachtet haben, in welchem es noch gerade eine Lösung für (13) gab. Für den Fall $\frac{d}{r} > 0.663$ gibt es keinen Schnittpunkt und somit keine Lösung mehr, physikalisch würde das bedeuten, dass die Seifenhaut spätestens ab diesem Punkt zerreißt. Für den Fall $\frac{d}{r} < 0.663$ gibt es zwei Schnittpunkte, wobei jedoch nur eine der Lösungen (die mit dem kleineren c_1) einem Minimum entspricht. Dies kann man explizit einsehen, wenn man die beiden Lösungen, welche sich ergeben, in das ursprüngliche Funktional $A[y]$ einsetzt.

Als mögliches Rechenbeispiel nehmen wir an, dass $r = 2$ und $d = (0.663 - 0.1)r \approx 1.125$, so dass $\frac{d}{r} < 0.633$. Mit diesen Werten ergeben sich zwei Schnittpunkte c_1 und c_2 , nämlich

$$c_1 \approx 0.6318 \quad \text{und} \quad c_2 = 1.6626,$$

welche auf zwei mögliche Lösungen für das Variationsproblem führen,

$$y_i(x) = \frac{1}{c_i} \cosh(c_i x), i \in \{1, 2\}. \quad (15)$$

Allerdings minimiert nur eine der beiden Lösungen das Funktional $A[y]$. Man sieht bereits in Abbildung 3, dass die Kurve y_1 , nach einer vollen Rotation um die x -Achse eine kleinere Oberfläche aufweist, als die Oberfläche welche von der Kurve y_2 erzeugt wird. Durch explizites Einsetzen und Ausrechnen erhält man

$$A[y_1] \approx 26.5579 \quad \text{und} \quad A[y_2] = 28.2226.$$

Wir schliessen, dass wir für $\frac{d}{r} < 0.663$ zwei Lösungen erhalten. Die Lösung, welche mit dem kleineren Wert für c gebildet wurde, minimiert das Funktional $A[y]$.

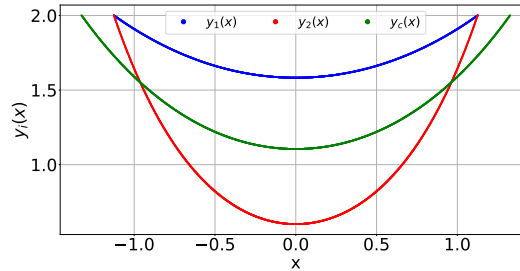


Abbildung 3: Plot der beiden Funktionen y_1 und y_2 . Zur Illustration wird auch die Lösung für den Grenzfall $d = 0.663r$ gezeigt, hier existiert nur eine mögliche Lösung y_c .

4. Bestimme die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (die Geodäte) auf einem Zylinder mit Radius R .

- (a) Verwende zuerst kartesische Koordinaten und kopple die Nebenbedingung “Kreiszylinder” über Lagrangeparameter an.

Lösung: Bezeichne $\vec{x}(t)$ eine reguläre Kurve auf dem Zylinder, welche parametrisiert ist mit Parameter t . Wir wollen nun die Distanz D

$$D = D[\vec{x}] = \int_C |d\vec{x}| = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (16)$$

als Funktional von $\vec{x}(t)$ minimieren. In der vorherigen Gleichung bezeichnet $x' = x'(t)$ eine Ableitung nach t . Das Funktional ist allerdings unabhängig von der Parametrisierung. Nach einem Satz der Differentialgeometrie gilt, dass eine beliebige Kurve nach der Bogenlänge s umparametrisiert werden kann, so dass

$$||\dot{x}(s)|| = 1, \quad (17)$$

wobei $\dot{x}$ die Ableitung nach der Bogenlänge kennzeichnet. Dies möchten wir uns später zu Nutze machen. Zunächst bilden wir die erweiterte Lagrange-Funktion mit der implementierten Nebenbedingung $g(x, y)$

$$\mathcal{L} = ||\vec{x}'(t)|| - \lambda g(x, y) \quad (18)$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x^2 + y^2 - R^2). \quad (19)$$

Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ führt auf

$$2\lambda x = \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right), \quad (20)$$

$$2\lambda y = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right), \quad (21)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right). \quad (22)$$

Wir benutzen nun die Tatsache, dass eine beliebige Kurve nach der Bogenlänge s umparametrisiert werden kann, so dass sich die obigen Gleichungen vereinfachen zu

$$2\lambda x = \ddot{x}, \quad (23)$$

$$2\lambda y = \ddot{y}, \quad (24)$$

$$0 = \ddot{z}. \quad (25)$$

Durch zweimaliges Integrieren erhalten wir $z(s) = as + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ vorerst mal beliebige Konstanten sind. Zweimaliges Ableiten der Nebenbedingung $g(x, y)$ führt auf

$$\ddot{g}(x, y) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0. \quad (26)$$

Mit Hilfe der vorherigen Bewegungsgleichungen und der Tatsache, dass dank unserer Parametrisierung gilt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 - \dot{z}^2 = 1 - a^2, \quad (27)$$

erhalten wir

$$2\lambda(x^2 + y^2) + (1 - a^2) = 0, \quad (28)$$

$$\lambda = \frac{a^2 - 1}{2R^2}, \quad (29)$$

wobei $|a| \leq 1$. Wenn wir nun $\omega^2 = \frac{1-a^2}{R^2} \geq 0$ definieren, erhalten wir die fehlenden zwei Differentialgleichungen für x und y

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (30)$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (31)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung $x^2 + y^2 = R^2$ ergibt sich als Lösung

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega s + \phi_0) \\ R \sin(\omega s + \phi_0) \\ as + b \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Wir sehen also, dass der Fall $a = 0$ die Situation beschreibt, in der wir die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf dem Zylinder auf gleicher Höhe suchen. Die Lösungslinie ist entsprechend parallel zur xy -Ebene. Für den Fall, dass $a = 1$, gilt $\omega = 0$ und man sieht direkt, dass die Lösungskurve gegeben ist durch eine Gerade, welche senkrecht nach oben verläuft. Die Fälle dazwischen beschreiben Schraubenlinien auf dem Zylinder.

- (b) Verwende dann Zylinderkoordinaten $\vec{r} = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ und parameterisiere die Verbindungskurve als $z(\phi)$, mit Anfangspunkt $z(\phi_1) = z_1$ und Endpunkt $z(\phi_2) = z_2$. Die Distanz erhält man mittels dem Linienintegral

$$\int_C |d\vec{r}| = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|.$$

Lösung: Wie zuvor möchten wir die Distanz $D[\vec{x}]$ als Funktional von $\vec{x}$ minimieren. Da uns bereits Zylinderkoordinaten vorgegeben sind, vereinfacht sich das Funktional und wir erhalten

$$D = D[z] = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \left| \frac{d\vec{x}}{d\phi} \right| = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \sqrt{x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 + z'(\phi)^2} \quad (33)$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \sqrt{R^2 + z'(\phi)^2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \mathcal{L}[z(\phi), z'(\phi), \phi]. \quad (34)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = K = \text{const.}$$

Dann ist auch z' konstant,

$$z'^2 = K^2 (R^2 + z'^2) \quad \Rightarrow \quad z'^2 = \frac{K^2 R^2}{1 - K^2}$$

und

$$z(\phi) = \frac{KR}{\sqrt{1 - K^2}} \phi + C,$$

wobei die Konstanten C und K durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die Geodäten auf dem Zylinder, welche durch diese Parametrisierung beschrieben werden, sind somit Schraubenlinien (Helixe).

Randbemerkung: Eine geschicktere Art die Randbedingungen zu implementieren wäre direkt über die Parametrisierung, welche wir im ersten Teil der Aufgabe verwendet haben. Wenn wir mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t + \phi_0) \\ R \sin(\omega t + \phi_0) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (35)$$

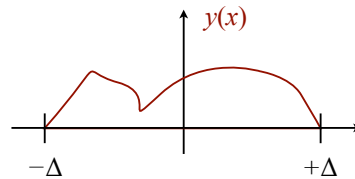
starten, erhält man nach analoger Rechnung wie zuvor

$$z(t) = \frac{KR\omega}{\sqrt{1-K^2}}t + C. \quad (36)$$

Der Vorteil dieser Parametrisierung ist, dass wir alle Fälle abgedeckt haben. Für $\omega = 0$ können wir eine vertikale Lösungskurve parametrisieren und für $\omega \neq 0$ erhalten wir wieder die bekannten Lösungen in Form von Schraubenlinien.

5. Isoperimetrisches Problem der maximalen Fläche unter einer Kurve:

Betrachte eine Kurve $y(x)$ von $y(-\Delta) = 0$ nach $y(\Delta) = 0$ mit Länge $L > 2\Delta$. Welche Kurve liefert die maximale Fläche?



Lösung: Die Fläche unter der Kurve $y(x)$ ist gegeben durch

$$J[y] = \int_{-\Delta}^{+\Delta} dx y = \int_{-\Delta}^{+\Delta} dx F(y, y', x) = \text{maximal}.$$

Weiter soll die Länge der Kurve fest sein und somit muss die Nebenbedingung

$$L = \int_{-\Delta}^{+\Delta} dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{-\Delta}^{+\Delta} dx G(y, y', x) = \text{const.}$$

erfüllt sein. Die Eulergleichungen sind für die Funktion

$$F^* = F - \lambda G = y - \sqrt{1 + y'^2} \lambda$$

aufzustellen, wobei λ ein Parameter ist. Wir sehen, dass F^* nicht explizit von x abhängt und können somit die “Energieerhaltung” verwenden,

$$F^* - \frac{dF^*}{dy'} y' = y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{const.},$$

woraus folgt, dass

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2}}{y - a}.$$

Durch Trennung der Variablen finden wir

$$x - C = -\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2},$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Daraus folgt

$$y(x) = a + \sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2}.$$

Umformen und quadrieren führt zu

$$(y - a)^2 + (x - C)^2 = \lambda^2.$$

Wir sehen aus dieser Gleichung, dass die Lösungen Kreisbögen sind, mit Radius λ und Mittelpunkt (C, a) . Aus den Anfangsbedingungen und der Nebenbedingung

$$y(-\Delta) = y(+\Delta) = 0 \quad \text{und} \quad L = \int_{-\Delta}^{+\Delta} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

lassen sich die Konstanten a, C und λ bestimmen. Aus $y(-\Delta) = y(\Delta)$ folgt $C = 0$. Weiter folgt aus $y(\Delta) = 0$, dass $a = \sqrt{\lambda^2 - \Delta^2}$. Aus der Nebenbedingung erhalten wir eine Gleichung für λ ,

$$\arcsin\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right) = \frac{L}{2\lambda}.$$

Diese Gleichung kann nicht analytisch gelöst werden. Man findet jedoch heraus, dass sie nur Lösungen für $2\Delta < L < \pi\Delta$ hat. Die untere Grenze ist klar, da falls L nicht mindestens der Strecke zwischen den Punkten entspricht, die Kurve diese logischerweise nicht verbinden kann. Die obere Grenze entspricht gerade dem Fall, in dem die Lösung einen Halbkreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt. Darüber hinaus kann die Kurve (welche dann mehr als ein Halbkreis ist) natürlich nicht mehr durch eine Funktion $y(x)$ beschrieben werden.