

1. Ein Körper der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_G = (0, 0, -mg)$ in einer Kugelschale mit Radius R_0 .
 - (a) Finde verallgemeinerte Koordinaten und gib die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ des Systems an.

Lösung: Wir wählen Kugelkoordinaten mit den beiden Winkeln ϕ, θ als verallgemeinerte Koordinaten

$$\begin{aligned}x &= R_0 \cos \varphi \sin \theta, \\y &= R_0 \sin \varphi \sin \theta, \\z &= R_0 \cos \theta.\end{aligned}$$

Aus $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$ und $U = mgz$ folgt

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{m}{2} R_0^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2) - mg R_0 \cos \theta.$$

- (b) Leite die Bewegungsgleichung her.

Lösung: Aus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = m R_0^2 \ddot{\theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R_0 \sin \theta (g + R_0 \cos \theta \dot{\varphi}^2)$$

folgt die Bewegungsgleichung für θ

$$\ddot{\theta} = \sin \theta (g/R_0 + \cos \theta \dot{\varphi}^2).$$

Da $\mathcal{L}$ unabhängig von φ ist, hat die Bewegungsgleichung für φ die einfache Form

$$\frac{d}{dt} (m R_0^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) = 0.$$

Diese Kombination ist somit konstant und entspricht gerade einer Erhaltungsgrösse, nämlich der z -Komponente des Drehimpulses. Dies folgt, da das Potential und die Zwangsbedingung invariant gegenüber Drehungen um die z -Achse sind.

2. Betrachte eine schiefe Ebene, deren Winkel proportional zur Zeit anwächst $\alpha = \omega t$ (also etwa einen Kipper beim Ausladen) und einen Massenpunkt der Masse m , der unter dem Einfluss der Schwerkraft diese Ebene reibungsfrei herunterrutscht.

- (a) Führe als verallgemeinerte Koordinate die zurückgelegte Strecke $s(t)$ entlang der Ebene ein und berechne die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$.

Lösung: Die Transformation zu kartesischen Koordinaten lautet

$$x = s \cos(\omega t), \quad y = s \sin(\omega t).$$

Aus $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ und $U = mgy = mgs \sin(\omega t)$ folgt

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\omega^2) - mgs \sin(\omega t).$$

- (b) Leite die Bewegungsgleichung her.

Lösung: Die Bewegungsgleichung lässt sich einfach aus der Lagrange Gleichung herleiten und lautet

$$m\ddot{s} = m\omega^2 s - mg \sin(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{s} = \omega^2 s - g \sin(\omega t)$$

und wir sehen, dass sich die Masse m ausdividieren lässt.

- (c) Die Bewegungsgleichung ist eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bestimme die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Zeige, dass $s(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösung: Für das Lösen der homogenen Gleichung $\ddot{s} = \omega^2 s$ verwenden wir den Ansatz

$$s_{\text{hom.}}(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}.$$

Einsetzen in die Gleichung führt zu $k = \omega$ und somit haben wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $s_{\text{hom.}}(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Ohne Randbedingungen sind A und B beliebig.

Um zu zeigen, dass $s_{\text{part.}}(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$ eine Lösung ist, setzen wir diese einfach in die inhomogene Gleichung ein,

$$\text{LHS : } \ddot{s} = -\frac{g}{2} \sin(\omega t),$$

$$\text{RHS : } \omega^2 s - g \sin(\omega t) = \frac{g}{2} \sin(\omega t) - g \sin(\omega t) = -\frac{g}{2} \sin(\omega t),$$

und sehen, dass beide Seiten das Gleiche ergeben.

- (d) Bestimme die Lösung zu den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.

Lösung: Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$s(t) = s_{\text{hom.}}(t) + s_{\text{part.}}(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t).$$

Die beiden Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Aus $s(0) = 0$ folgt $B = -A$ und aus $\dot{s}(0) = 0$ folgt weiter $A = -\frac{g}{4\omega^2}$. Somit ist die Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen

$$s(t) = \frac{g}{4\omega^2} (e^{-\omega t} - e^{\omega t} + 2 \sin(\omega t)) = \frac{g}{2\omega^2} (\sin(\omega t) - \sinh(\omega t)) .$$

3. Betrachte einen starren Körper aus drei Massenpunkten, deren Abstände Δ_{12} , Δ_{23} , Δ_{13} fest sind.

- (a) Was sind die zugehörigen Zwangsbedingungen?

Lösung: Für die 9 kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)$ gelten 3 Zwangsbedingungen

$$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - \Delta_{12} = 0, \quad |\vec{x}_1 - \vec{x}_3| - \Delta_{13} = 0, \quad |\vec{x}_2 - \vec{x}_3| - \Delta_{23} = 0 .$$

- (b) Wieviele Freiheitsgrade hat dieses System und was ist deren Bedeutung?

Lösung: Somit hat das System $9 - 3 = 6$ Freiheitsgrade. 3 Freiheitsgrade entsprechen den drei möglichen Bewegungsrichtungen des Schwerpunktes und die anderen 3 Freiheitsgrade den drei möglichen Rotationsrichtungen.

- (c) Wie sieht es bei einem starren Körper mit N Massenpunkten aus? Anzahl Zwangsbedingungen? Anzahl Freiheitsgrade?

Lösung: Betrachte einen starren Körper mit N Massenpunkten, wobei N beliebig. Grundsätzlich ist die Anzahl Freiheitsgrade gegeben durch

$$F = 3N - R, \tag{1}$$

wobei R der Anzahl (unabhängiger) Zwangsbedingungen entspricht. Man sieht sofort durch explizites Einsetzen und Auflegen der Zwangsbedingungen, dass

$$\begin{array}{lll} N = 1 & \rightarrow R = 0 & \rightarrow F = 3, \\ N = 2 & \rightarrow R = 1 & \rightarrow F = 5, \\ N = 3 & \rightarrow R = 3 & \rightarrow F = 6. \end{array}$$

Für $N > 3$ gilt, dass jeder zusätzliche Massenpunkt drei neue Freiheitsgrade dazu gibt, aber gleichzeitig durch mindestens drei zusätzliche Zwangsbedingungen fixiert wird (wovon genau 3 unabhängig sind). Dies bedeutet, dass für $N > 3$ die Anzahl Freiheitsgrade unverändert bleibt und gerade der Anzahl Freiheitsgrade für $N = 3$ Massenpunkten entspricht, d.h.

$$F = 6, N \geq 3. \tag{2}$$

4. Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F}_G = mg(0, -1)$ in der x - y -Ebene auf der Parabel $y = \kappa x^2$

(a) Formuliere die Zwangsbedingung $g(x, y) = 0$

Lösung: Die Zwangsbedingung ist gegeben durch

$$g(x, y) = y - \kappa x^2 = 0.$$

(b) Stelle die Lagrange Gleichungen 1. Art auf.

Lösung: Der Lagrange Funktion ist durch

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (3)$$

Die Lagrange Gleichung 1. Art (mit der Zwangsbedingung) ist also gegeben durch

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\vec{e}_y + \lambda\vec{\nabla}g(x, y),$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\kappa 2x \\ -mg + \lambda \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- (c) Bestimme den Lagrange Multiplikator $\lambda(t)$ als Funktion von Ort und Geschwindigkeit, aus der Bedingung $\ddot{g}(x, y) = 0$ und den Bewegungsgleichungen. Eliminiere damit $\lambda(t)$ aus den Bewegungsgleichungen.

Lösung: Durch Ableiten von $g(x, y)$ erhalten wir

$$\ddot{g}(x, y) = \ddot{y} - 2\kappa(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = 0.$$

Einsetzen von $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ aus (4) und Auflösen nach λ ergibt

$$\lambda = m \frac{2\kappa\dot{x}^2 + g}{1 + 4\kappa^2x^2}.$$

Die Bewegungsgleichungen werden dann zu

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(1 + 4\kappa^2x^2) + 4\kappa^2\dot{x}^2x + 2g\kappa x \\ \ddot{y}(1 + 4\kappa^2x^2) - 2\kappa\dot{x}^2 + 4g\kappa^2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei sich die y -Gleichung mithilfe der Bewegungsgleichung für die x -Komponente vereinfachen lässt zu

$$\ddot{y} = 2\kappa(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = \frac{d^2}{dt^2}(\kappa x^2).$$

Diese Gleichung resultiert einfach aus der Zwangsbedingung und enthält keine zusätzliche Information über die Dynamik des Systems. Die Information über die zeitliche Entwicklung ist bereits in der Bewegungsgleichung für die x -Komponente enthalten, weshalb sich diese auch gerade als verallgemeinerte Koordinate anbietet (vgl. Aufgabe 5).

5. Betrachte die gleiche Situation, wie in der vorherigen Aufgabe. Wähle die verallgemeinerte Koordinate q gleich der x -Komponente: $x = q$ und $y = \kappa q^2$.

(a) Gib die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ an.

Lösung: Aus

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{und} \quad U = mgy$$

folgt

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \frac{m}{2}\dot{q}^2(1 + 4\kappa^2 q^2) - mg\kappa q^2.$$

(b) Leite die Bewegungsgleichung für $q(t)$ her. Vergleiche mit (4c).

Lösung: Berechne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 4m\dot{q}^2\kappa^2 q - 2mg\kappa q,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}(1 + 4\kappa^2 q^2) + 8m\dot{q}\kappa^2 q\dot{q}.$$

Aus der Lagrangegleichung 2. Art folgt dann direkt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q}(1 + 4\kappa^2 q^2) + 4\kappa^2 \dot{q}^2 q + 2g\kappa q = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung der x -Komponente aus (5). Da $x = q$ erhalten wir also mit beiden Methoden dieselbe Bewegungsgleichung.

- (c) Betrachte kleine Auslenkungen $q(t) \ll 1/\kappa$ und kleines $\dot{q}(t) \ll \sqrt{g/\kappa}$. Entwickle die Gleichung im entsprechenden Limes und zeige, dass sich die Bewegungsgleichung dann auf diejenige eines harmonischen Oszillators reduziert. Was ist die zugehörige Federkonstante?

Lösung: Aus

$$q(t) \ll \kappa^{-1} \quad \text{folgt} \quad 4\kappa^2 q^2 \ll 4$$

und somit $(1 + 4\kappa^2 q^2) \rightarrow 1$. Weiter folgt aus

$$\dot{q}(t) \ll \sqrt{g/\kappa}, \quad \text{dass} \quad 4\kappa^2 \dot{q}^2 q \ll 4g\kappa q,$$

somit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (6) zu

$$\ddot{q} + 2g\kappa q = 0,$$

was genau der Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit Federkonstante

$$k = 2g\kappa m$$

entspricht.

6. Betrachte ein freies Teilchen der Masse m in einem rotierenden Bezugssystem. Berechne mithilfe einer Koordinatentransformation die Lagrangefunktion in einem nichtrotierenden Intertialsystem und leite daraus Ausdrücke für die Coriolis- und die Zentrifugalkraft her.

Lösung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die Rotations-Achse mit der z -Achse zusammenfällt. Betrachte Koordinaten (x, y) und (x', y') im Koordinatensystemen K und K' . Das Koordinatensystem K' soll um K rotieren mit Winkelgeschwindigkeit ω , so dass ein Punkt (x, y) in K' gegeben ist durch

$$x' = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), \quad y' = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t). \quad (7)$$

Die Lagrangefunktion ist damit gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}')^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(xy - yx). \quad (8)$$

Die Bewegungsgleichungen für (x, y) im neuen Koordinatensystem K' sind dann

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Wir sehen direkt, dass verglichen mit einer Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen zwei Terme auftreten, welche sonst nicht auftreten würden. Der erste Term $m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine radial nach aussen gerichtete abstossende Kraft und entspricht der Zentrifugalkraft. Der zweite Term $2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}$ beschreibt eine Kraft, welche von der Geschwindigkeit abhängt und gleichzeitig orthogonal zur Geschwindigkeit steht, und gerade der Corioliskraft entspricht.

Wir haben für unsere Berechnung eine vereinfachende Annahme getroffen und unser Koordinatensystem so gewählt, dass die Rotationsachse mit der z -Achse zusammenfällt, während die Bewegung des freien Teilchens in der xy -Ebene stattfindet. Der allgemeine Ausdruck für Rotationen um eine beliebige Rotationsachse $\vec{\omega}$ lautet

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}). \quad (10)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung beschreibt die Zentrifugalkraft, der zweite die Corioliskraft. Man sieht direkt durch Einsetzen, dass wir für

$$\vec{\omega} = |\omega| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

unseren Spezialfall von oben erhalten.

Die allgemeine Gleichung (10) kann ebenfalls mit Hilfe des Lagrangeformalismus hergeleitet werden, ist aber etwas rechenintensiver. Man muss sich zunächst davon überzeugen, dass

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times \vec{x}' \quad (11)$$

gilt. Einsetzen in die Lagrangefunktion und Berechnen der Euler-Lagrange Gleichungen führt dann auf das gewünschte Ergebnis.