

1. Eine Perle gleitet reibungsfrei und ohne angewandten Kräfte auf einem Stab, der mit einem Ende im Ursprung fixiert ist und sich in der xy -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht.
 - (a) Stelle die Bewegungsgleichung mithilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Benütze dazu Zylinderkoordinaten. Löse die Bewegungsgleichung und bestimme die Zwangskraft. Ist die Energie erhalten?

Lösung: Bezeichne $\varphi(t)$ den Polarwinkel, so, dass die Trajektorie der Perle beschrieben werden kann durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\varphi(t)) \\ r(t) \sin(\varphi(t)) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Wir haben hier direkt einen Koordinatenwechsel von $\{x, y, z\} \rightarrow \{r, \varphi, z\}$ gemacht. Zunächst formulieren wir die Zwangsbedingungen

$$g_1(r(t), \varphi(t), z(t), t) = \varphi(t) - \omega t \equiv 0, \quad (2)$$

$$g_2(r(t), \varphi(t), z(t), t) = z(t) \equiv 0. \quad (3)$$

Bei Betrachtung der Lagrange-Gleichungen erster Art für zwei Zwangsbedingungen

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{x}, t) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\vec{x}, t) \quad (4)$$

sehen wir, dass die Gleichung auf kartesische Koordinaten ausgerichtet ist. Wir schreiben also $\ddot{\vec{x}}$ und ∇ in Zylinderkoordinaten um. Die Einheitsvektoren für Zylinderkoordinaten lassen sich berechnen anhand der Gleichung (1), so, dass

$$\vec{e}_r = \frac{\partial_r \vec{x}}{|\partial_r \vec{x}|} = \frac{1}{|1|} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi \vec{x}}{|\partial_\varphi \vec{x}|} = \frac{1}{|r|} \begin{pmatrix} -r(t) \sin(\varphi) \\ r(t) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial_z \vec{x}}{|\partial_z \vec{x}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Man sieht direkt, dass man $\vec{x}$ schreiben kann als $\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Durch sorgfältiges Ableiten erhält man

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\vec{e}}_r + r\ddot{\vec{e}}_r + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (8)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{r}\vec{e}_z. \quad (9)$$

Der Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch (ohne Beweis)

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{|\partial_r \vec{x}|} \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{|\partial_\varphi \vec{x}|} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \frac{1}{|\partial_z \vec{x}|} \vec{e}_z \partial_z \quad (10)$$

$$= \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z. \quad (11)$$

Einsetzen in die Lagrange-Gleichungen ergibt

$$m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z] = \lambda_1 \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi + \lambda_2 \vec{e}_z \quad (12)$$

und durch Projizieren auf die jeweiligen Einheitsvektoren erhalten wir drei Gleichungen

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0, \quad (13)$$

$$m(\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = \frac{\lambda_1}{r}, \quad (14)$$

$$m\ddot{z} = \lambda_2. \quad (15)$$

Durch zweimaliges Ableiten der Zwangsbedingungen $\ddot{g}_1 = 0$, $\ddot{g}_2 = 0$, erhalten wir $\ddot{\varphi} = \ddot{z} = 0$, also zwei Gleichungen, welche wir direkt mit den vorherigen Gleichungen verrechnen können, um damit die Lagrange-Multiplikatoren zu eliminieren. Wir erhalten $\lambda_1 = 2m\dot{r}\dot{\varphi}$ und $\lambda_2 = 0$. Die Gleichung, welche noch zu lösen ist, lautet entsprechend

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\omega^2 = 0. \quad (16)$$

Die Lösung dieser Differential-Gleichung ist wohlbekannt und lautet

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \quad (17)$$

Die Zwangskraft ist gegeben durch

$$\vec{Z} = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 2m\dot{r}\omega \vec{e}_\varphi. \quad (18)$$

Für die Energieerhaltung berechnen wir

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = 2m\dot{r}r\omega^2 \neq 0. \quad (19)$$

Wir sehen, dass die Energie nicht erhalten ist!

- (b) Verwende nun die Lagrange-Gleichungen zweiter Art, um die Bewegungsgleichung aufzustellen. Wie steht es um die Energieerhaltung?

Lösung: Wir starten mit der allgemeinsten Lagrangefunktion in Zylinder-

koordinaten

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad (20)$$

wobei wir direkt, der Aufgabenstellung entsprechend, $V = 0$ gesetzt haben. Da wir bereits die Zwangsbedingungen kennen, können wir $\dot{\varphi} = \omega$ und $\dot{z} = 0$ setzen. Die Bewegungsgleichung, welche sich anhand der Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt, ist uns bereits aus der vorherigen Aufgabe bekannt,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad (21)$$

$$m\ddot{r} = mr\omega^2. \quad (22)$$

Wie sieht es im Lagrangeformalismus mit der Energieerhaltung aus? Die Beltrami-Identität sagt, dass

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - \mathcal{L} \right) = 0, \quad (23)$$

wobei $\mathcal{H}$ die Hamilton-Funktion bezeichnet. Da auch in unserem System $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ gilt, ist die Hamiltonfunktion tatsächlich eine erhaltene Grösse. Wenn man die Hamiltonfunktion mit der Energie identifiziert, könnte man meinen, dass die Energie erhalten ist, ein klarer Widerspruch zum Resultat aus der vorherigen Aufgabe. In der Tat, darf man hier die Hamiltonfunktion nicht mit der Energie identifizieren, der Grund liegt in der nicht-skleronomen Zwangsbedingung

$$g_1(\varphi) = \varphi - \omega t = 0, \quad (24)$$

welche eine zeitabhängige Koordinatentransformation erfordert. Anwenden der Koordinatentransformation $\{x, y, z\} \rightarrow \{r, \varphi, z\}$, führt auf

$$\mathcal{L} = T(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}, t), \quad (25)$$

was in diesem Fall gerade der Gesamtenergie des Systems entspricht (man erinnere sich daran, dass $V = 0$). Die Berechnung der Hamiltonfunktion ergibt Zusatzterme aufgrund des Koordinatenwechsels, so dass

$$\mathcal{H} \neq T(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}, t). \quad (26)$$

Wir sehen also, dass man die Nicht-Erhaltung der Energie aus der klassischen Betrachtung herleiten muss.

2. Eine Punktmasse m_1 ist durch zwei gleiche Federn mit Federkonstanten $k/2$ zwischen zwei Wänden eingespannt und kann sich nur horizontal in x -Richtung entlang der Federn bewegen. Eine zweite Punktmasse m_2 ist mit einem masselosen Faden der Länge ℓ an m_1 befestigt und bewegt sich nur in der xz -Ebene unter dem Einfluss der homogenen Gravitationskraft $m_2 g$ in z -Richtung.

- (a) Wähle geeignete verallgemeinerte Koordinaten und stelle die Lagrangefunktion auf.

Lösung: Wir haben zwei verschiedene Massenpunkte, welche wir mit kartesischen Koordinaten $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ kennzeichnen. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Punktmasse m_1 im Gleichgewicht gerade im Koordinatenursprung bei $x_1 = y_1 = 0$ liegt. Nun können wir bereits die Zwangsbedingungen angeben: Da die erste Punktmasse nur eine horizontale Bewegung ausführen kann, gilt $g_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = y_1(t) \equiv 0$, und da der Abstand zwischen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ konstant l ist, gilt $g_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| - l = 0$. Eine horizontale Auslenkung der Punktmasse m_1 kann parametrisiert werden mit Hilfe einer verallgemeinerten Koordinate $x_1 = x_1(q) = q$ und wir können direkt $y_1 = 0$ setzen. Die Punktmasse m_2 beschreibt ein verschobenes Pendel, auf welches die Gewichtskraft wirkt, entsprechend führen wir die verallgemeinerte Koordinate φ ein. Die Koordinaten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ ausgedrückt in verallgemeinerten Koordinaten sind dann gegeben durch

$$\vec{x}_1(q, \varphi) = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(q, \varphi) = \begin{pmatrix} q + l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Das gesamte Potential kann ebenfalls mit Hilfe dieser verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt werden, unter Verwendung der Tatsache, dass das Potential einer Feder mit Federkonstante D gegeben ist durch $V = \frac{1}{2} D x^2$. Das Potential lautet nun (mit $D = k/2$)

$$V(q, \varphi) = m_2 g (-l \cos(\varphi)) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}\right) (+q)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}\right) (-q)^2 = -m_2 g l \cos(\varphi) + \frac{k}{2} q^2. \quad (28)$$

Der komplette Lagrangian ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - V \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{q} \dot{\varphi} \cos(\varphi)) + m_2 g l \cos(\varphi) - \frac{k}{2} q^2. \end{aligned} \quad (29)$$

- (b) Leite die Bewegungsgleichungen her.

Lösung: Wir haben nun zwei Euler-Lagrange-Gleichungen für zwei verallgemeinerte Koordinaten, nämlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad (30)$$

welche auf die Bewegungsgleichungen

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - m_2 l (\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) + kq = 0, \quad (31)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{q} \cos(\varphi) + m_2 g l \sin(\varphi) = 0 \quad (32)$$

führen.

- (c) Zeige, dass das System für kleine Auslenkungen äquivalent zu einem normalen Pendel mit Länge $\tilde{\ell}$ ist, und bestimme $\tilde{\ell}$.

Lösung: Wir betrachten für kleine Auslenkungen

$$\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin(\varphi) \approx \varphi, \quad (33)$$

unser Lagrangian aus (29) ergibt somit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\approx \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}^2 + \frac{m_2}{2} \left((l\dot{\varphi})^2 + 2l\dot{q}\dot{\varphi} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right) + m_2 g l \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) - \frac{k}{2} q^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2) \dot{q}^2 + m_2 (l\dot{\varphi})^2 + 2m_2 \dot{q}(l\dot{\varphi}) - m_2 \frac{g}{l} (l\varphi)^2 - kq^2 \right) + m_2 g l \end{aligned} \quad (34)$$

wo wir in der zweiten Zeile einen Term der Ordnung $\dot{\varphi}\varphi^2$ vernachlässigt haben. Somit linearisiert der Lagrangian und wir können ihn schreiben als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left(M_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - V_{ij} \xi_i \xi_j \right) + C \quad (35)$$

mit $\xi_1 = q$, $\xi_2 = l\varphi$ sowie

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}, \quad V_{ij} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 \frac{g}{l} \end{pmatrix}, \quad C = m_2 g l \quad (36)$$

Da C nur eine Konstante ist und die Bewegungsgleichungen nicht ändert, können wir sie auch weglassen. Ausrechnen der Euler-Lagrange-Gleichung (oder einsetzen der Kleinwinkelnäherung mit $\varphi^2, \dot{\varphi}^2 \varphi \approx 0$ in (31) und (32)) führt auf

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\xi}_2 + \frac{k}{m_1 + m_2} \xi_1 = 0, \quad (37)$$

$$\ddot{\xi}_2 + \ddot{\xi}_1 + \frac{g}{l} \xi_2 = 0, \quad (38)$$

Wobei es sich um zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren handelt. Wir betrachten den Ansatz $\xi_i = A_i e^{i\omega t}$, mit gemeinsamer Frequenz ω und untersuchen so den Fall wo das System wie ein einzelnes Pendel mit einer gemeinsamen Frequenz schwingt. Wir erhalten

$$kA_1 - \omega^2(A_1(m_1 + m_2) + A_2 m_2) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{g}{l} A_2 - \omega^2(A_1 + A_2) = 0, \quad (40)$$

Wir sehen, dass es sich hierbei um ein lineares Gleichungssystem in A_1 und A_2 handelt, was wir schreiben können als

$$\begin{pmatrix} k - \omega^2(m_1 + m_2) & -\omega^2 m_2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (41)$$

Für $A_1, A_2 \neq 0$ muss somit die Determinante der Matrix verschwinden und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} k - \omega^2(m_1 + m_2) & \omega^2 m_2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix} \\ &= (k - \omega^2(m_1 + m_2)) \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right) - \omega^2 m_2 (-\omega^2) \\ &= \omega^4 m_1 + \omega^2 \left(-\frac{g(m_1 + m_2)}{l} - k \right) + \frac{gk}{l} \end{aligned} \quad (42)$$

Lösen der quadratischen Gleichung für ω^2 liefert

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{kl + g(m_1 + m_2) \pm \sqrt{g^2(m_1 + m_2)^2 + 2gkl(m_2 - m_1) + k^2 l^2}}{2m_1 l}. \quad (43)$$

Also zwei mögliche gemeinsame Frequenzen.

Wenn wir den Sonderfall $m_1 = m_2 = m$ und $kl = 2gm$ betrachten, erhalten wir, wie bereits beim normalen Doppelpendel gesehen,

$$\omega_{\pm} = \left(2 \pm \sqrt{2} \right) \frac{g}{l} \quad (44)$$

wobei die beiden Schwingsysteme bei ω_- synchron und bei ω_+ asynchron schwingen.

3. Ein homogenes Seil der Länge L mit linearer Massendichte μ liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über die Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen, worauf es reibungsfrei vom Tisch gleitet.

- (a) Bestimme die Lagrangefunktion und leite die Bewegungsgleichung her.

Lösung: Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die xy -Ebene mit der Tischoberfläche zusammenfällt, und wählen eine aufwärts zeigende z -Achse. Die z -Koordinate bezeichne das Ende des Seils, welches nicht mehr auf der Tischkante liegt und der Schwerkraft ausgesetzt ist. Die Kraft, welche auf einen überhängenden Seilabschnitt wirkt, ist gegeben durch $-\mu g z$. Für das Potential gilt entsprechend

$$V(z) = - \int_z^0 dz' F(z') = -\frac{\mu g z^2}{2}, \quad (45)$$

so, dass die komplette Lagrangefunktion geschrieben werden kann als

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{\mu g z^2}{2}. \quad (46)$$

(b) Bestimme die Lösung für die obigen Anfangsbedingungen.

Lösung: Die entsprechende Bewegungsgleichung lautet, unter Verwendung von $m = \mu L$,

$$\ddot{z} = \frac{g}{L} z. \quad (47)$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$z(t) = A e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} + B e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t}, \quad (48)$$

Einsetzen der Randbedingungen $z(0) = \frac{L}{2}$, $\dot{z}(0) = 0$ ergibt

$$z(t) = \frac{L}{2} \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right). \quad (49)$$

4. In der Vorlesung wurde angegeben, dass die kinetische Energie $T(q, t)$ in verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f)$ die Form

$$T(q, t) = \sum_{i,k=1}^f a_{ik}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{k=1}^f b_k(q, t) \dot{q}_k + c(q, t)$$

hat. Leite einen Ausdruck für die Koeffizienten $a_{ik}(q, t)$, $b_k(q, t)$ und $c(q, t)$ her, ausgehend von der kinetischen Energie

$$T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \quad (50)$$

in kartesischen Koordinaten und den Beziehungen $x_n(q, t) = x_n(q_1, \dots, q_f, t)$. Leite dazu zunächst einen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\dot{x}_n(q, \dot{q}, t)$ her und setze diesen in (50) ein. Unter welchen Umständen verschwindet der Koeffizient $c(q, t)$?

Lösung: Betrachte ein System mit N Massenpunkten, f Freiheitsgraden und verallgemeinerten Koordinaten q . Dann ist

$$x_n = x_n(q_k, t), \quad n = 1, 2, \dots, 3N, \quad k = 1, 2, \dots, f, \\ \dot{x}_n = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}.$$

Einsetzen in (50) führt dann zur gewünschten Form mit Koeffizienten

$$a_{ik}(q, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}, \quad b_k(q, t) = 2 \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$c(q, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \left(\frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^2.$$

Es ist einfach zu sehen, dass der Koeffizient $c(q, t)$ verschwindet, wenn die kartesischen Koordinaten ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten nicht explizit von der Zeit abhängen, $x_n(q_k, t) = x_n(q_k)$. In diesem Fall verschwinden auch die Koeffizienten $b_k(q, t)$ und die kinetische Energie hat die einfache Form

$$T = T(q, \dot{q}) = \sum_{i,k=q}^f a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (\text{wenn } \partial x_n / \partial t = 0).$$

5. Koordinatenwechsel. Beim Aufstellen der Lagrangefunktion führt man verallgemeinerte Koordinaten q_i ($i = 1, \dots, f$) ein. Die Wahl dieser Koordinaten ist nicht eindeutig. Betrachte einen Koordinatenwechsel zu neuen Koordinaten Q_i ($i = 1, \dots, f$):

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_f, t) \quad \text{oder umgekehrt} \quad Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_f, t).$$

Nimm die Lagrangefunktion $\mathcal{L}^*(Q, \dot{Q}, t)$ und zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichung in den neuen Koordinaten,

$$\frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_i} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{Q}_i} = 0,$$

durch Koordinatenwechsel aus derjenigen für die Originalkoordinaten folgt

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, f) \rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, f).$$

Hinweise: Der Koordinatenwechsel und damit auch die Matrix $\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}$ sind invertierbar.

Zeige und verwende, dass $\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}$.

Lösung: Zuerst beweisen wir den Hinweis. Dazu muss man sich nur überlegen, dass die Koordinaten q_k Funktionen von Q_k und t sind, und die zeitliche Ableitung bilden (wobei wiederum über doppelte Indizes summiert wird):

$$\dot{q}_k = \frac{d}{dt} q_k = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial q_k}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}$$

und aus der Invertierbarkeit folgt dann die Behauptung. Weiter überlegen wir uns, wie die neue Lagrangefunktion $\mathcal{L}^*$ umgeschrieben werden kann,

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^*(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L} \left(q_1(Q, t), \dots, q_f(Q, t), \frac{\partial q_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial q_f}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_f}{\partial t}, t \right).$$

Somit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial Q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}.$$

Zusammengesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} - \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right) \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \mathcal{L}^*}{\delta Q_k} = 0.$$