1. Betrachte ein Teilchen im kugelsymmetrischen Potential $U(r)$, mit $r = |\vec{r}|$.

   (a) Leite die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) her. (Der Winkel ϕ sei der Winkel in der x-y-Ebene, θ der Winkel des Ortsvektors zur z-Achse.)

   Lösung: Die Lösung für die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten lautet

   $$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2\right) - U(r)\,.$$

   Man erhält dieses Resultat entweder durch explizites Ausrechnen von

   $$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(r)$$

   wobei

   $$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

   oder einfacher durch das in T. Fliessbach, Kapitel 10, Abschnitt "Krummlinige Koordinaten" beschriebene Verfahren, wobei ausgenützt wird, dass es sich bei Kugelkoordinaten um orthogonale Koordinaten handelt.

   (b) Zeige, dass ϕ eine zyklische Koordinate ist und gib die zugehörige Erhaltungsgrösse an.

   Lösung: Die Koordinate ϕ ist eine zyklische Koordinate, da die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ nicht explizit von ihr abhängt. Ihre zugehörige Erhaltungsgrösse ist die z-Komponente des Drehimpulses, gegeben durch

   $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin(\theta)^2\dot{\phi} = l_z = \text{const.} \tag{1}$$

   (c) Leite die Bewegungsgleichungen her.

   Lösung: Bewegungsgleichung für r

   $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\ddot{r}\,,$$

   $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin(\theta)^2\dot{\phi} - \frac{\partial U(r)}{\partial r} \qquad \xRightarrow{\text{Lagrange Gleichung}}$$

   $$\ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2\dot{\phi}) - \frac{1}{m}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

Bewegungsgleichung für θ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = 2mr\dot r\,\dot\theta + mr^2\ddot\theta\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mr^2\dot\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta) \qquad \xRightarrow{\text{Lagrange Gleichung}} \tag{2}$$

$$r\ddot\theta = r\dot\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\dot r\,\dot\theta.$$

Wenn man das System betrachtet, müssen alle Komponenten des Drehimpulses ($\vec l \propto \vec x \times \dot{\vec x}$) erhalten sein. Berechnen wir die Zeitableitungen der x- und y-Komponente, unter Voraussetzung dass die z-Komponente erhalten ist (in 1b gezeigt) erhalten wir

$$\frac{dl_x}{dt} = r\sin(\phi)\left(r\dot\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\dot r\,\dot\theta - r\ddot\theta\right)$$
$$\frac{dl_y}{dt} = -r\cos(\phi)\left(r\dot\phi^2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\dot r\,\dot\theta - r\ddot\theta\right).$$

Wir sehen, dass diese durch Gleichung (2) automatisch Null sind und somit die Drehimpulse in x und y Richtung auch erhalten sind. Die Bewegungsgleichung für θ liefert also die Erhaltung des Gesamtdrehimpluses (unter Voraussetzung von Gleichung (1)).

2. Betrachte zwei Massen $m_1 = m_2 = m$, die durch eine Feder miteinander verbunden sind und sich in der x-y-Ebene bewegen können. Wähle als verallgemeinerte Koordinaten den Abstand der zwei Massen $\vec r = r(\cos\phi, \sin\phi)$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec R$. Der Betrag der Kraft, welche die Feder ausübt sei $|\vec F| = k\,r$.

   (a) Stelle die Lagrangefunktion auf. Bestimme dazu zunächst das Potential zur Kraft $\vec F$.

Lösung: Aus den Gleichungen

$$|\vec F| = kr \qquad \text{und} \qquad \vec F = -\vec\nabla U$$

kann das Potential U bestimmt werden

$$U = +\frac{1}{2}kr^2\,.$$

Weiter werden die kartesischen Koordinaten folgendermassen durch die verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt

$$\vec x_1 = \begin{pmatrix} R_1 - \frac{r}{2}\cos(\phi) \\ R_2 - \frac{r}{2}\sin(\phi)\end{pmatrix} \qquad \vec x_2 = \begin{pmatrix} R_1 + \frac{r}{2}\cos(\phi) \\ R_2 + \frac{r}{2}\sin(\phi)\end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2\right) - U = \frac{m}{4}\left(r^2\dot\phi^2 + \dot r^2 + 4(\dot R_1^2 + \dot R_2^2)\right) - \frac{1}{2}kr^2.$$

(b) Zeige, dass die Schwerpunktskoordinaten R_i sowie der Winkel ϕ zyklisch sind und gib die dazugehörigen erhaltenen Grössen an.

Lösung: Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von den Schwerpunktskoordinaten R_i oder dem Winkel ϕ ab. Somit sind diese Koordinaten zyklisch, mit Erhaltungsgrössen

$$p_{R_i} = 2m\dot{R}_i\,, \qquad p_\phi = \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}\,,$$

wobei dies der Erhaltung des Schwerpunkts-Impulses und der z-Komponente des Drehimpulses entspricht.

(c) Nimm an, dass die verallgemeinerten, erhaltenen Impulse die Werte $p_\phi = p_0$ und $p_{R_i} = P_i$ haben, wobei p_0 und $\vec{P}$ gegeben seien.

Lösung: Nun nehmen wir fixe Werte für die Impulse an

$$p_\phi = p_0 \qquad p_{R_i} = P_i.$$

(d) Gib einen Ausdruck für die erhaltene Energie E als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten an. Eliminiere aus diesem Ausdruck $\dot{\phi}$ und $\dot{R}_i$ mittels der Erhaltungsgrössen aus Aufgabe (2c). Die resultierende Gleichung $E(\dot{r}, r) = E_0$ ist eine Differenzialgleichung 1. Ordnung für $\dot{r}$. (Eine Lösung wird nicht verlangt.)

Lösung: Aus $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ und $\partial x_n/\partial t = 0$ folgt die Erhaltung der Energie

$$E = T + U = \frac{m}{4}\left(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2 + 4(\dot{R}_1^2 + \dot{R}_2^2)\right) + \frac{1}{2}kr^2 = E_0.$$

Einsetzen der Impulse aus c) führt zu

$$E = \frac{(P_1^2 + P_2^2)}{4m} + \frac{p_0^2}{mr^2} + \frac{m\dot{r}^2}{4} + \frac{1}{2}kr^2 = E_0.$$

3. Ein Teilchen der Ladung q im homogenen elektrischen Feld $\vec{E}_0$ kann durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

beschrieben werden.

(a) Das System (aber nicht $\mathcal{L}$) ist invariant unter Translationen. Was sind die erhaltenen Grössen?

Lösung: Betrachte eine infinitesimale Translation $\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{a}\epsilon + \ldots$. Also haben wir in der üblichen Notation

$$r_i \to r_i^* = r_i + a_i\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad := r_i + \epsilon\psi_i + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3}$$

$$t \to t^* = t + 0 \qquad := t + \epsilon\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{4}$$

also $\psi_i = a_i$ und $\varphi = 0$. Nun können wir die Änderung in der Wirkung durch unsere Transformation als totale zeitliche Ableitung schreiben,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L}(x^*, \dot{x}^*, y^*, \dot{y}^*, t^*)\frac{dt^*}{dt}\right]_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L} + q\,\vec{E}_0 \cdot \vec{a}\,\epsilon\right]_{\epsilon=0} \\ = q\,\vec{E}_0 \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(q\,\vec{E}_0 \cdot \vec{a}\,t\right) &:= \frac{d}{dt}f(r,t)\end{aligned}$$

und erhalten nach dem erweiterten Noethertheorem die folgende Erhaltungsgrösse

$$\begin{aligned}Q &= \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\psi_i + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\dot{r}_i\right) - f(r,t) \\ &= (m\dot{\vec{r}} - q\,\vec{E}_0\,t) \cdot \vec{a}\end{aligned} \tag{5}$$

wo wir $\psi_i = a_i$ und $\varphi = 0$ verwendet haben. Dies gilt für beliebige $\vec{a}$. Insbesondere können wir daraus ablesen, dass der Impuls $m\dot{\vec{r}}$ erhalten ist falls $\vec{a} \perp \vec{E}_0$. In der Richtung parallel zum Feld wird das Teilchen gleichmässig beschleunigt.

(b) Löse die Euler-Lagrange Gleichungen und verifiziere, dass die Grössen, die unter (a) hergeleitet wurden, in der Tat erhalten sind.

Lösung: Einsetzen in die Euler-Lagrange Gleichungen führt auf die einfache Differentialgleichung

$$\ddot{r}_i = \frac{qE_{0\,i}}{m}$$

mit der Lösung

$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}_0}{2m}t^2 + \vec{C}_1\,t + \vec{C}_2\,,$$

wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind. Durch einmaliges Ableiten sieht man leicht, dass somit die Erhaltungsgleichung aus a) erfüllt ist,

$$m\dot{\vec{r}} = q\vec{E}_0\,t + m\vec{C}_1\,.$$

4. Zeige, dass die Wirkung eines Teilchens im Potential $U(\vec{r}) = \alpha/\vec{r}^2$ invariant ist unter der Transformation

$$\vec{r} \to \vec{r}^* = \lambda\,\vec{r}\,, \qquad t \to t^* = \lambda^2\,t\,.$$

Was ist die zugehörige Erhaltungsgrösse und was ist deren Bedeutung?

Lösung: Es ist zu zeigen, dass die Wirkung invariant ist also: $S = S^*$. Aus den Transformationsgleichungen können wir folgende Relationen herleiten,

$$\dot{\vec{r}}^* = \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} = \frac{d\vec{r}^*}{dt}\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{\lambda}\dot{\vec{r}}, \qquad\qquad \frac{dt^*}{dt}dt = \lambda^2 dt\,.$$

Nun können wir einfach die Wirkung berechnen und sehen, dass diese invariant ist,

$$\begin{aligned} S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{*2} - \frac{\alpha}{\vec{r}^{*2}}\right) &= \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{dt^*}{dt}\left(\frac{m}{2}\frac{1}{\lambda^2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{\lambda^2\vec{r}^2}\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{\vec{r}^2}\right) = S\,. \end{aligned}$$

Um die dazugehörige Erhaltungsgrösse zu berechnen, betrachten wir eine infinitesimale Transformation und setzen dazu $\lambda = 1 + \epsilon$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= \vec{r} + \epsilon\vec{r} &&:= \vec{r} + \epsilon\vec{\psi} \quad \Rightarrow \quad \psi_i = r_i\,, \\ t^* &= t + 2\epsilon t &&:= t + \epsilon\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2t\,. \end{aligned}$$

Die Erhaltungsgrösse Q lässt sich nun einfach mit der folgenden Formel (Noethertheorem) berechnen (wobei über doppelte Indizes summiert wird),

$$Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\psi_i + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\dot{r}_i\right)\varphi = m\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} - E\,2t = \text{const.}\,,$$

wobei benützt wurde, dass $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt und somit die Energie $E = \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}\dot{r}_i$ erhalten ist. Weiter ist aus der Lagrangefunktion auch klar, dass der Drehimpuls erhalten ist. Somit ist auch der Betrag des Drehimpulses erhalten, $L = |\vec{L}| = m|\vec{r}||\dot{\vec{r}}|\sin(\theta) =$ konstant. Einsetzen in die obige Erhaltungsgrösse liefert dann eine Bewegungsgleichung für den Zwischenwinkel θ zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$,

$$\frac{L}{\tan(\theta)} - E\,2t = Q \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{L}{2Et + Q}\right)\,.$$

Weiter können wir auch die Gleichung für $r(t)$ durch Umformen und Einsetzen von L und E erhalten:

$$r^2 = \frac{L^2 + (Q + 2Et)^2 + 2m\alpha}{2Em}\,.$$

Aus diesen Gleichungen können wir für verschiedene Anfangsszenarien die Bewegung des Teilchen überlegen:

1.) $Q > 0$: Der Winkel verkleinert sich mit der Zeit, das Teilchen bewegt sich spiralförmig nach aussen. Ausser für den Spezialfall $\theta = 0$, dann ist $L = 0$ und somit bleibt θ zeitlich konstant Null.

2.) $Q < 0$: Das Teilchen fällt erst nach innen bis zur Zeit $t = \frac{-Q}{2E}$. Dort springt dann der Winkel von $\theta = -\pi/2$ zu $\theta = +\pi/2$. Dieser Sprung wird verursacht, da sich der Geschwindigkeitsvektor dreht $\dot{\vec{r}} \to -\dot{\vec{r}}$. Das Teilchen bewegt sich also erst spiralförmig nach innen (gegen den "Potentialberg") bis zu einem Radius von $r_0^2 = (L^2 + 2m\alpha)/(2Em)$, dann dreht es und fliegt wieder nach aussen.

5. Betrachte die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\, \dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2} M\, \dot{\vec{y}}^2 - V(|\vec{x} - \vec{y}|)$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{L}$ *nicht* invariant ist unter $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}\,t$, $\vec{y} \to \vec{y} + \vec{v}\,t$, wobei $\vec{v}$ ein konstanter Vektor ist. Interpretation dieser Transformation?

Lösung: Unter der angegebenen Transformation verändert sich die Lagrangefunktion folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^{*2} + \frac{M}{2}\dot{\vec{y}}^{*2} - V(|\vec{x}^* - \vec{y}^*|) \\
&= \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}^2 + 2\dot{\vec{x}}\vec{v} + \vec{v}^2) + \frac{M}{2}(\dot{\vec{y}}^2 + 2\dot{\vec{y}}\vec{v} + \vec{v}^2) - V(|\vec{x} - \vec{y}|) \\
&= \mathcal{L} + \frac{m}{2}(2\dot{\vec{x}}\vec{v} + \vec{v}^2) + \frac{M}{2}(2\dot{\vec{y}}\vec{v} + \vec{v}^2)\,.
\end{aligned}$$

Somit ist sie also nicht invariant. Diese Transformation wird Galilei-Transformation genannt und beschreibt den Wechsel in ein Bezugssystem, welches sich geradlinig und gleichförmig zum vorherigen bewegt.

(b) Betrachte eine infinitesimale Transformation $\vec{v} = \epsilon\,\vec{a}$ und zeige, dass sich die Änderung von $\mathcal{L}$ unter der Transformation als totale Zeitableitung einer Funktion der Koordinaten schreiben lässt. Deshalb gilt, trotz (a), ein Erhaltungssatz. Benutze die Verallgemeinerung des Theorems von Noether um die zugehörige erhaltene Grösse zu finden.

Lösung: Der zusätzliche Term lässt sich als totale zeitliche Ableitung einer Funktion ausdrücken. Wir betrachten die Geschwindigkeiten in die drei Raumrichtungen als infinitesimal $v_i = a_i(\epsilon + \epsilon^2 + \dots)$, wobei a_i die Richtung angibt und berechnen

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L}(x^*, \dot{x}^*, y^*, \dot{y}^*, t^*)\frac{dt^*}{dt}\right]_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L} + \frac{m}{2}(2\dot{x}_i a_i \epsilon + a_i a_i \epsilon^2) + \frac{M}{2}(2\dot{y}_i a_i \epsilon + a_i a_i \epsilon^2)\right]_{\epsilon=0} \\
&= \left(m\dot{\vec{x}} + M\dot{\vec{y}}\right)\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{x} + M\vec{y}\right)\vec{a} = \frac{d}{dt}(M+m)\vec{R}\cdot\vec{a}\,,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Schwerpunktskoordinate $\vec{R} = \frac{1}{m+M}(m\vec{x} + M\vec{y})$ eingeführt wurde. Somit haben wir nach dem verallgemeinerten Theorem von Noether trotzdem eine Erhaltungsgrösse

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\psi_i^x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i}\psi_i^y + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\varphi^x + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i\right)\varphi^y - f(x,y,t)\,.$$

Mit $\psi_i^x = \psi_i^y = a_i t$ und, da die Zeitkomponente nicht transformiert wird, $\varphi^x = \varphi^y = 0$, folgt

$$Q = ((m\dot{x}_i + M\dot{y}_i)a_i t - (M+m)R_i a_i) = (M+m)\left(\dot{\vec{R}}\,t - \vec{R}\right)\vec{a}\,.$$

Da dies für beliebige $\vec{a}$ gelten muss, ist also

$$\dot{\vec{R}}\,t - \vec{R} = \text{konstant}\,,$$

was eine geradlinig und gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes bedeutet. Transformieren wir zu einem System mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{R}}$ wird der Schwerpunkt zu einer Erhaltungsgrösse. Dieses bestimmte Bezugssystem ist das sogenannte Schwerpunktssystem.

6. In geeigneten Einheiten lautet die Lagrangefunktion eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{r}}^2 - \vec{r}^2\right), \quad \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \vec{e}_i$$

(a) Zeige, dass die Transformation

$$x_i' = x_i + \frac{\epsilon}{2}(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k), \quad k,l \in \{1,2,3\}\,,$$

die Wirkung invariant lässt.

Lösung: Durch die gegebene Transformation der Komponenten x_i von $\vec{r}$ erhalten wir für kleine $\epsilon \ll 1$

$$\vec{r}'^2 = x_i x_i + \epsilon x_i(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k) = x_i x_i + \epsilon\frac{d}{dt}(x_k x_l)\;, \tag{6}$$

$$\dot{\vec{r}}'^2 = \dot{x}_i\dot{x}_i + \epsilon\dot{x}_i(\delta_{ik}\ddot{x}_l + \delta_{il}\ddot{x}_k) = \dot{x}_i\dot{x}_i + \epsilon\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\dot{x}_l)\;, \tag{7}$$

wobei wir die Einstein'sche Summenkonvention verwenden (über wiederholte Indizes wird summiert) und Terme $\sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ vernachlässigen. Die beiden Terme $\sim \epsilon$ sind totale zeitliche Ableitungen und führen somit in der Wirkung zu Randtermen, welche verschwinden. Somit bleibt die Wirkung erhalten.

(b) Bestimme die zugehörigen Noether-Ströme J_{kl} und zeige, dass die Energieerhaltung darin enthalten ist.

Lösung: Die beiden Randterme ergeben also

$$\delta L = \frac{1}{2}\epsilon\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\dot{x}_l - x_k x_l) := \epsilon\frac{d}{dt}f \tag{8}$$

Somit ergeben sich die Noether-Ströme mit der üblichen Formel und $\psi_i = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k)$, $\varphi = 0$ als

$$J_{kl} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{1}{2}(\delta_{ik}\dot{x}_l + \delta_{il}\dot{x}_k) - \frac{1}{2}(\dot{x}_k\dot{x}_l - x_k x_l) = \dot{x}_k\dot{x}_l - \frac{1}{2}(\dot{x}_k\dot{x}_l - x_k x_l) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_k\dot{x}_l + x_k x_l)\ . \tag{10}$$

Für $k = l$ (und summiert) erhalten wir die Energieerhaltung ($E = T + U$).

(c) Welches sind die anderen Erhaltungsgrössen?

Lösung: Wenn man Kugelkoordinaten benutzt, so ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta} + r^2\sin(\theta)^2\dot{\varphi}^2 - r^2). \tag{11}$$

Man sieht direkt, dass φ eine zyklische Koordinate ist und entsprechend die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist,

$$\frac{d}{dt}l_z = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin(\theta)^2\dot{\varphi}\right) = 0. \tag{12}$$