1. Allgemeine Herleitung des Noether-Theorems:
Betrachte die gleichzeitige Transformation

$$t \to t' = t + \epsilon \cdot X(t)\,,$$
$$q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon \cdot Q_i(t)\,,$$

wobei $\epsilon \ll 1$ und X, Q_i die Generatoren der Transformation sind. Falls die Wirkung unter dieser Transformation (bis auf Randterme) invariant ist,

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'), t') = S + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{df}{dt}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) + \frac{df}{dt} \right\}\,,$$

dann ist

$$J = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \cdot X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i + f$$

eine erhaltene Grösse. Beweise dies gemäss der in der Vorlesung gegebenen Anleitung.

Lösung: Wir betrachten eine Transformation der Zeit t und der Koordinaten q_i

$$t \to t' = t + \epsilon X(t) \tag{1}$$
$$q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon Q_i(t), i \in \{1, 2, ..., f\}. \tag{2}$$

Nun gilt zu zeigen, dass falls die Wirkung bis auf Randterme invariant ist, d.h.

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'} q_i'(t'), t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i(t), \frac{d}{dt} q_i(t), t) + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df(q,t)}{dt} \tag{3}$$
$$= S + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df(q,t)}{dt},$$

so existiert ein erhaltener Noether-Strom

$$J = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) X - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} Q_i + f. \tag{4}$$

In der vorherigen Gleichung wurde die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. über doppelte Indizes wird jeweils summiert. Gemäss der Anleitung im Unterricht schreiben wir zunächst die Wirkung S' um, so dass

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'} q_i'(t'), t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'} q_i'(t'), t') \frac{dt'}{dt} \right]. \tag{5}$$

Diese Wirkung entwickeln wir nun für kleine ϵ also wie $f(\epsilon) = f(0) + \epsilon \cdot \frac{d}{d\epsilon} f'(\epsilon)\big|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Das heißt in unserem Fall da $t'\big|_{\epsilon=0} = t$ und $q'\big|_{\epsilon=0} = q$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'}q_i'(t'), t')\frac{dt'}{dt} &= \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \\ &\quad + \epsilon \frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'}q_i'(t'), t')\frac{dt'}{dt}\right]\bigg|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man direkt, dass

$$\epsilon \frac{d}{d\epsilon}\left[\mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'}q_i'(t'), t')\frac{dt'}{dt}\right]\bigg|_{\epsilon=0} = \epsilon \frac{d}{dt} f(q,t), \tag{7}$$

die zu erfüllende Gleichung ist. Den multiplikativen Faktor ϵ können wir kürzen. Auf der linken Seite der Gleichung möchten wir den Term innerhalb der eckigen Klammern entwickeln, um die Ableitung auf einfache Art und Weise darauf wirken zu lassen. Wir benutzen

$$\begin{aligned}\frac{dt'}{dt} &= 1 + \epsilon \dot{X}(t) \\ \frac{d}{dt'}q_i'(t') &= \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}(q_i(t) + \epsilon Q_i(t)) = \frac{1}{1+\epsilon\dot{X}(t)}(\dot{q}_i(t) + \epsilon\dot{Q}_i(t)) \\ &= (\dot{q}_i(t) + \epsilon\dot{Q}_i(t))(1-\epsilon\dot{X}(t)) = \dot{q}_i(t) + \epsilon(\dot{Q}_i(t) - \dot{q}_i(t)\dot{X}(t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{8}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q_i'(t'), \frac{d}{dt'}q_i'(t'), t')\frac{dt'}{dt} = &\left(\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\epsilon Q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\epsilon(\dot{Q}_i - \dot{q}_i\dot{X}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\epsilon X\right) \\ &\times(1+\epsilon\dot{X}).\end{aligned}$$

Nun kann die Ableitung nach ϵ ausgeführt (und danach bei $\epsilon = 0$ ausgewertet) werden und wir erhalten

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)\dot{X} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}Q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}(\dot{Q}_i - \dot{q}_i\dot{X}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}X = \frac{d}{dt}f(q_i,t). \tag{9}$$

Geschicktes Umschreiben ergibt

$$\left(\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\dot{X} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)Q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}Q_i\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}X = \frac{d}{dt}f(q_i,t). \tag{10}$$

An diesem Punkt benutzen wir ein Zwischenresultat, welches wir erhalten wenn wir die totale Ableitung einer beliebigen Lagrangefunktion berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t},\end{aligned}$$

wo wir in der zweiten Zeile partiell integriert haben. Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right). \tag{11}$$

Einsetzen von Gleichung (11) in (10) und Verwenden der E.-L.-Gleichungen ergibt die zu beweisende Aussage

$$\frac{d}{dt}\left[(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)X + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}Q_i - f\right] = 0. \tag{12}$$

2. Benutze die Komponentenschreibweise

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i\, b_i\,, \qquad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k\,, \tag{13}$$

um die folgenden Relationen zu beweisen

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\,,\\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c},\\
\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\right) &= \vec{B}(\vec{r})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})\right) - \vec{A}(\vec{r})\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})\right)\,,\\
\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{O}) &= \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N})
\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{O}$ 3×3 Matrizen sind. Benutze, dabei wie in (13) die Einsteinsche Summenkonvention: Repetierte Indizes werden automatisch summiert. Erinnere Dich an die folgende Relation

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\,.$$

Lösung:

I.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\epsilon_{ijk}b_jc_k = c_k\epsilon_{kij}a_ib_j = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\,,$$

wobei benutzt wurde, dass der ϵ-Tensor total anti-symmetrisch ist.

II.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)_i &= \epsilon_{ijk}a_j\epsilon_{klm}b_lc_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}a_jb_lc_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m\\
&= a_mb_ic_m - a_lb_lc_i = \left(\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\right)_i\,.
\end{aligned}$$

III.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_i(\epsilon_{ijk} A_j B_k) = \epsilon_{ijk}(\partial_i A_j) B_k + \epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k)$$
$$= B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

IV.
Wir benutzen, dass für Matrizen im allgemeinen gilt

$$(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{O})_{ij} = \boldsymbol{M}_{ik} \boldsymbol{N}_{kl} \boldsymbol{O}_{lj} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_{ii}$$

somit

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{O}) = \boldsymbol{M}_{ik} \boldsymbol{N}_{kl} \boldsymbol{O}_{li} = \boldsymbol{O}_{li} \boldsymbol{M}_{ik} \boldsymbol{N}_{kl} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}).$$

3. Der Schwerpunkt einer kontinuierlichen Massenverteilung ist

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V d^3 r \, \rho(\vec{r}) \, \vec{r} \,,$$

wobei M die Masse des Körpers ist. Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kegels $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ mit Grundfläche A und Höhe h.

Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so, dass die z-Achse in der Mitte des Kegels (Spitze bei $z = h$) und die Grundfläche in der xy-Ebene mit $z = 0$ liegt. Wir berechnen erst die Masse M. Zur Vereinfachung werden wir Zylinderkoordinaten einführen. Der Radius der Grundfläche A ist gegeben durch $r_A = \sqrt{A/\pi}$, Der Radius auf der Höhe z ist somit $r(z) = r_A(1 - \frac{z}{h})$ (Strahlensatz). Die Masse ist somit gegeben als

$$M = \int_V d^3 r \rho(\vec{r}) = \rho_0 \int_V d^3 r = \rho_0 \int_0^h dz \int_0^{r_A(1-z/h)} dr \, r \int_0^{2\pi} d\phi = \rho_0 \frac{\pi r_A^2 h}{3} = \rho_0 \frac{A \, h}{3}.$$

Nun kann der Schwerpunkt berechnet werden,

$$R_x = \frac{\rho_0}{M} \int_V d^3 r \, r_x = \frac{3}{A \, h} \int_0^h dz \int_0^{r_A(1-z/h)} dr \, r \int_0^{2\pi} d\phi \cdot r \cos\phi = 0 \,,$$

da $\cos\phi$ 2π-periodisch ist. Dasselbe passiert für die y-Komponente

$$R_y = \frac{\rho_0}{M} \int_V d^3 r \, r_y = \frac{3}{A \, h} \int_0^h dz \int_0^{r_A(1-z/h)} dr \, r \int_0^{2\pi} d\phi \cdot r \sin\phi = 0 \,.$$

Für die z-Komponente erhalten wird

$$R_z = \frac{\rho_0}{M} \int_V d^3 r \, r_z = \frac{3}{A \, h} \int_0^h dz \int_0^{r_A(1-z/h)} dr \, r \int_0^{2\pi} d\phi \cdot z = \frac{3}{A \, h} \frac{A \, h^2}{12} = \frac{h}{4} \,.$$

4. Der Trägheitstensor einer kontinuierlichen Massenverteilung lautet

$$\Theta_{ik} = \int_V d^3r \, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^2 \, \delta_{ik} - r_i \, r_k\right) \, .$$

Der Tensor wird im körperfesten System berechnet und als Ursprung $\vec{r} = 0$ wird üblicherweise der Schwerpunkt verwendet.

Betrachte den Kegel aus der vorherigen Aufgabe und lege die z-Achse in die Mitte des Kegels (die Achse geht also durch den Schwerpunkt und die Kegelspitze). Berechne die Komponente Θ_{zz} des Trägheitstensors.

Lösung: Wir legen das Koordinatensystem gleich wie in der vorherigen Aufgabe, ausser, dass jetzt der Ursprung beim Schwerpunkt liegt (Spitze bei $z = 3h/4$, Grundfläche bei $z = -h/4$). Wiederum verwenden wir Zylinderkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \rho_0 \int_V d^3r \, (\vec{r}^2 - r_z r_z) \\
&= \rho_0 \int_{-h/4}^{3h/4} dz \int_0^{r_A(3/4 - z/h)} dr \, r \int_0^{2\pi} d\phi \cdot (r^2 + z^2 - z^2) \\
&= \rho_0 \, 2\pi \int_{-h/4}^{3h/4} dz \int_0^{r_A(3/4 - z/h)} dr \, r^3 \\
&= \rho_0 \, 2\pi r_A^4 \int_{-h/4}^{3h/4} dz \frac{(3/4 - z/h)^4}{4} = \rho_0 \, \frac{\pi}{2} r_A^4 \frac{h}{5} \\
&= \frac{3}{10} r_A^2 \cdot M \, .
\end{aligned}$$

5. Betrachte einen Quader mit Seitenlängen a, b und c.

   (a) Berechne den Trägheitstensor Θ_{ij} (wie üblich im körperfesten System und bezüglich des Schwerpunkts). In welche Richtungen zeigen die Hauptachsen?

   Lösung: Wir legen das körperfeste System gerade in die Mitte des Quaders (Schwerpunkt) mit Achsen parallel zu den Seitenlängen. Der Trägheitstensor ist gegeben durch

   $$\Theta_{ik} = \int_V d^3r \, \rho(r)(r^2 \delta_{ik} - r_i r_k) = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (r^2 \delta_{ik} - r_i r_k).$$

   Alle nicht-diagonalen Elemente sind Null, da dort die Komponenten linear vorkommen (ungerade Funktion) und über ein symmetrisches Gebiet integriert wird, z.B.

   $$\Theta_{12} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \, x \int_{-b/2}^{b/2} dy \, y \int_{-c/2}^{c/2} dz = 0.$$

Das erste Diagonalelement erhält man als

$$\Theta_{11} = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (y^2 + z^2) = \rho_0 a \left(c\frac{b^3}{12} + b\frac{c^3}{12} \right) = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)\,,$$

wobei im letzten Schritt die Masse $M = \rho_0\, abc$ eingesetzt wurde. Die beiden anderen Elemente folgen durch Permutation der Kanten des Quaders

$$\Theta_{22} = \frac{M}{12}(a^2 + c^2)\,, \quad \Theta_{33} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)\,.$$

Da die Matrix diagonal ist, entsprechen unsere auswählten Koordinatenachsen gerade den Hauptachsen.

(b) Was ist die kinetische Energie T_{rot} und der Drehimpuls $\vec{L}$ für eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = |\vec{\omega}|$ um eine Achse durch den Schwerpunkt und eine Ecke des Quaders? Ist der Drehimpuls bei dieser Rotation erhalten?

Lösung: Die Winkelgeschwindigkeit kann geschrieben werden als $\vec{w} = \vec{n}\,\omega_0$ wobei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Ecke des Quaders ist. Die Komponenten dieses Vektors im körperfesten System (KS) lauten

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,(a\,, b\,, c\,)\,.$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} =& \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} \Theta_{ik}\omega_i'\omega_k' = \frac{\omega_0^2}{2}\,\vec{n}^T\Theta\,\vec{n} = \frac{\omega_0^2}{2}\,\frac{a^2\Theta_{11} + b^2\Theta_{22} + c^2\Theta_{33}}{a^2 + b^2 + c^2} \\ =& \frac{\omega_0^2\,M}{12}\,\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

und die Komponenten des Drehimpulses im KS erhält man mittels $\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega}$ als

$$\begin{aligned} \vec{L} = \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \frac{\omega_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{\omega_0\,M}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a\,(b^2 + c^2) \\ b\,(a^2 + c^2) \\ c\,(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, zeigt er nicht in die gleiche Richtung wie die Winkelgeschwindigkeit. Dies war zu erwarten, da die Rotation nicht um eine der Hauptachsen erfolgt. Das obige Resultat entspricht dem Drehimpuls im KS. Da sich dieses System dreht, wird sich vom Intertialsystem aus gesehen der Drehimpuls um die Richtung $\vec{w}$ mitdrehen und er ist somit nicht erhalten.

Da wir die Drehachse künstlich festhalten, üben wir ein Drehmoment auf den Körper aus. Ohne dieses Drehmoment, bei einer freien Rotation, wäre der Drehimpuls erhalten und der Winkelgeschwindigkeitsvektor würde sich drehen.

6. Satz von Steiner. Der Trägheitstensor eines Körpers für Rotationen um den Schwerpunkt sei Θ_{ij}. Betrachte nun eine Rotation um einen anderen Punkt O', der vom Schwerpunkt um $\vec{a}$ verschoben sei. Zeige, dass der Trägheitstensor Θ'_{ij} für Rotationen um O' durch
$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + M\left(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i\, a_j\right)$$
gegeben ist.

Lösung: Hier ist der Beweis für einen starren Körper mit endlich vielen Massenpunkten. Um auf kontinuierliche Körper zu schliessen, kann einfach
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \ldots \xrightarrow{N\to\infty} \int d^3r\,\rho \ldots$$
ersetzt werden,
$$\Theta'_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \left(\vec{x}'^2_\nu\delta_{ij} - (x'_\nu)_i(x'_\nu)_j\right) .$$
Da das gestrichene System durch eine Verschiebung um $\vec{a}$ aus dem Schwerpunktssystem entsteht, gilt $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ und
$$\begin{aligned}\Theta'_{ij} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \left((\vec{x}_\nu + \vec{a})^2\delta_{ij} - ((x_\nu)_i + a_i)((x_\nu)_j + a_j)\right)\\ &= \Theta_{ij} + \sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \left(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu \left(2(\vec{x}_\nu\vec{a})\delta_{ij} - ((x_\nu)_i a_j + (x_\nu)_j a_i\right)\\ &= \Theta_{ij} + M\left(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j\right) ,\end{aligned}$$
wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass es sich beim ungestrichenen System um das Schwerpunktssystem handelt ($\sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu\vec{x}_\nu = 0$).

7. Betrachte einen Zylinder (Radius R, homogen, Masse M) der eine schiefe Ebene mit Winkel α herunterrollt.

   (a) Berechne das Trägheitmoment des Zylinder zur relevanten Drehachse.

Lösung: Bei der relevanten Drehachse handelt es sich gerade um eine Hauptsache. Zur Berechnung des Trägheitsmoments bietet es sich an Zylinderkoordinaten zu verwenden. Wir legen den Zylinder so, dass die Drehachse der x-Achse entspricht,

$$\Theta = \Theta_{11} = \int_V d^3r \rho_0 \left(\vec{r} - x_1^2\right) = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r \int_{-L/2}^{L/2} dz\, r^2 = \frac{M\, R^2}{2},$$

wobei im letzten Schritt die Masse $M = \rho_0 R^2 \pi\, L$ eingesetzt wurde.

(b) Stelle die Lagrangefunktion auf. Nimm die zurückgelegte Strecke $s(t)$ als Koordinate.

Lösung: Die kinetische Energie ist gegeben durch die Summe der kinetischen Energie der Translation (T_{trans}) und der Rotation (T_{rot}). Der Winkelgeschwindigkeitsvektor ist $\vec{\omega} = (\omega_0, 0, 0) = (\dot{\varphi}, 0, 0)$ und somit

$$T = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^{\,2}\,.$$

Wir überlegen uns, dass die abgerollte Strecke bei einer Winkeländerung um φ durch $s = R\varphi$ gegeben ist, und erhalten so

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{s}^2.$$

Weiter berechnen wir die potentielle Energie, dazu benötigen wir die Höhe des Schwerpunktes des Zylinders

$$U(s) = Mgh = -M\, g\, s \sin(\alpha)\,,$$

wobei wir der Einfachheit halber die Höhe $h = 0$ am Anfangspunkt $s = 0$ gewählt haben. Somit ist die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = T - U = \frac{1}{2}\left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{s}^2 + Mgs\sin(\alpha)\,.$$

(c) Leite damit die Bewegungsgleichung her und löse diese.

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichungen geben

$$\left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{s} - Mg\sin(\alpha) = 0\,.$$

Vereinfachen und Einsetzen der Lösung von Θ aus (a) ergibt

$$\ddot{s} = \frac{M}{M + \frac{\Theta}{R^2}} g\sin(\alpha) = \frac{2}{3} g\sin(\alpha)$$

und somit

$$s(t) = \frac{1}{3} g \sin(\alpha) t^2 + v_0 t + s_0.$$

Die Lösung ist, wie erwartet, eine gleichmässige Beschleunigung, wobei die Beschleunigung von der Schiefe der Ebene abhängt. Beachte, dass die Beschleunigung eines rollenden Zylinders 2/3 mal diejenige eines gleitenden Körpers ist.