

1. Betrachte die Eulergleichungen eines starren Körpers für den Fall $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.

- (a) Zeige, dass die Bewegung bei einer Drehung um die erste Hauptachse ($\omega'_1 \neq 0, \omega'_2 = \omega'_3 = 0$) gleichmässig und konstant ist, d.h. $\omega'_1(t) = \Omega, \omega'_2(t) = \omega'_3(t) = 0$.

Lösung: Einsetzen der Bedingungen in die Eulerschen Gleichungen

$$\Theta_1 \dot{\omega}'_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega'_2 \omega'_3 = M_1, \quad (1)$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}'_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega'_1 \omega'_3 = M_2, \quad (2)$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}'_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega'_1 \omega'_2 = M_3 \quad (3)$$

mit $M = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ liefert

$$\Theta_1 \dot{\omega}'_1 = 0, \quad (4)$$

$$0 = 0,$$

$$0 = 0,$$

so dass für $\Theta_1 \neq 0$ direkt folgt

$$\omega'_1 := \Omega = \text{const.} \quad (5)$$

- (b) Betrachte nun eine kleine Störung dieser Bewegung $\vec{\omega}' \rightarrow \vec{\omega}' + \vec{\epsilon}$ mit $\epsilon_i \ll \Omega$ und notiere die entsprechenden Bewegungsgleichungen.

Lösung: Wir betrachten die Störung mit $\epsilon_i \ll \Omega$ und erhalten

$$\omega'_1 = \Omega + \epsilon_1, \quad (6)$$

$$\omega'_2 = \epsilon_2, \quad (7)$$

$$\omega'_3 = \epsilon_3. \quad (8)$$

Somit werden die Eulerschen Gleichungen zu

$$\Theta_1 \dot{\epsilon}_1 = (\Theta_2 - \Theta_3) \epsilon_2 \epsilon_3, \quad (9)$$

$$\Theta_2 \dot{\epsilon}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1) \epsilon_3 (\Omega + \epsilon_1), \quad (10)$$

$$\Theta_3 \dot{\epsilon}_3 = (\Theta_1 - \Theta_2) \epsilon_2 (\Omega + \epsilon_1). \quad (11)$$

- (c) Linearisiere die Bewegungsgleichungen und löse sie. Dabei müssen Fallunterscheidungen bezüglich der Ordnung der Grössen der Hauptträgheitsmomente gemacht werden. Für welche Fälle ist die Bewegung stabil?

Lösung: Wir linearisieren die Bewegungsgleichungen und vernachlässigen alle höheren ϵ_i Terme und erhalten

$$\Theta_1 \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad (12)$$

$$\Theta_2 \dot{\epsilon}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1) \epsilon_3 \Omega, \quad (13)$$

$$\Theta_3 \dot{\epsilon}_3 = (\Theta_1 - \Theta_2) \epsilon_2 \Omega. \quad (14)$$

Einerseits ergibt (12) sofort $\epsilon_1 = \text{const.}$ Andererseits können wir (13) nach der Zeit ableiten und mit Θ_3 multiplizieren,

$$\Theta_3 \Theta_2 \ddot{\epsilon}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1) \Theta_3 \dot{\epsilon}_3 \Omega,$$

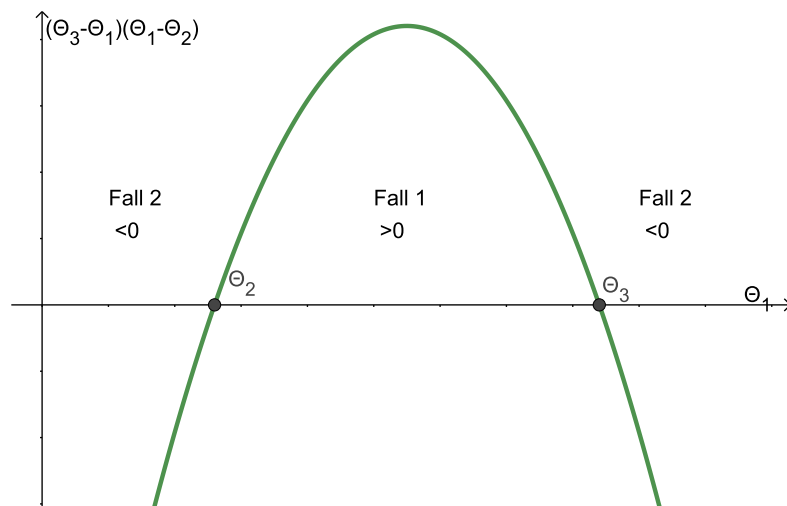
so dass wir auf der rechten Seite den Ausdruck in Gl. (14) einsetzen können,

$$\Theta_3 \Theta_2 \ddot{\epsilon}_2 = (\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_1 - \Theta_2) \Omega^2 \epsilon_2,$$

was auf eine DGL 2. Ordnung für ϵ_2 führt,

$$\ddot{\epsilon}_2 = \frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_3 \Theta_2} \Omega^2 \epsilon_2 := k^2 \epsilon_2.$$

Die DGL für ϵ_3 folgt analog, oder dann später direkt aus ϵ_2 via (13). Für alles Weitere müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden. Wie man in der folgenden Abbildung sieht, kann $k^2 > 0$ oder $k^2 < 0$ sein, je nach Hierarchie der Trägheitsmomente.



Fall 1: $k^2 > 0$ falls $\Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3$

Es folgt die Lösung

$$\epsilon_2 = A e^{kt} + B e^{-kt}. \quad (15)$$

Für $A \neq 0$ (was für allgemeine Anfangsbedingungen der Störung sicher der Fall ist) wächst ϵ_2 also exponentiell $\rightarrow$ instabil!

Fall 2: $k^2 < 0$ falls $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$ oder $\Theta_2 < \Theta_3 < \Theta_1$
 Es folgt die Lösung

$$\epsilon_2 = A \cos(kt) + B \sin(kt), \quad (16)$$

was eine Schwingung beschreibt und insbesondere nach oben und unten gebunden ist. Damit bleibt ϵ_2 klein $\rightarrow$ stabil!

Dies ist also dann der Fall, wenn die ursprüngliche Drehung um die Hauptachse mit dem kleinsten oder grössten Hauptträgheitsmoment stattfindet.

2. Symmetrischer Kreisel $\Theta_1 = \Theta_2$ mit konstantem Drehmoment. Löse die Eulergleichungen für den Fall, dass auf den Kreisel ein konstantes Drehmoment $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ wirkt. Die Anfangsbedingungen seien $\phi(0) = \theta(0) = \psi(0) = 0$, sowie $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0$. Gib die Eulerwinkel als Funktion der Zeit an.

Lösung: Wir haben folgende Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = M_0 \vec{e}_z.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $\vec{\omega}(0) = 0$ oder $\vec{L}(0) = 0$, somit erhalten wir die Lösung

$$\vec{L}(t) = \Theta_i \omega_i'(t) \vec{e}_i'(t) = M_0 \vec{e}_z t,$$

wobei die $\vec{e}_i'$ die körperfesten Achsen bezeichnen und $\vec{e}_z$ die z -Achse im IS. Um eine konsistente Gleichung zu erhalten, drücken wir diese mithilfe der Eulerwinkel in den KS Komponenten aus. Man ermittelt, dass

$$\vec{e}_z = \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{e}_1' + \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{e}_2' + \cos(\theta) \vec{e}_3'. \quad (17)$$

Die Herleitung ist dieselbe wie im Fließbach, aufgrund unserer Konvention sind allerdings ψ und ϕ vertauscht. Weiter drücken wir auch die ω_i' in den Eulerwinkeln aus und erhalten das folgende System von drei gekoppelten Differentialgleichungen

$$\Theta_1 \omega_1' = \Theta_1 (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) = M_0 \sin \theta \sin \phi t,$$

$$\Theta_1 \omega_2' = \Theta_1 (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) = M_0 \sin \theta \cos \phi t,$$

$$\Theta_3 \omega_3' = \Theta_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = M_0 \cos \theta t.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $\dot{\theta} = 0$. Dazu kann die erste Gleichung durch $\sin \phi$ geteilt werden und die zweite durch $\cos \phi$, somit werden die beiden rechten Seiten gleich. Durch Gleichsetzen der beiden linken Seiten und Umformen erhalten wir dann eine Gleichung

$$\dot{\theta} \frac{1}{\cos \phi \sin \phi} = 0,$$

welche nur erfüllt sein kann, wenn $\dot{\theta} = 0$. Wir haben in der obigen Herleitung jeweils durch $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ geteilt und jeweils angenommen, dass $\sin(\phi) \neq 0$

und $\cos(\phi) \neq 0$. Man kann sich durch direktes Einsetzen davon überzeugen, dass man das gleiche Resultat erhält, wenn man diese beiden Fälle einzeln betrachtet. Wegen der Anfangsbedingung $\theta(0) = 0$ folgt $\theta(t) = 0$, womit die beiden ersten Gleichungen erfüllt sind. Die dritte Gleichung wird

$$\Theta_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}) = M_0 t.$$

Wir bemerken, dass mit $\theta(t) = 0$ die z -Achse und die $\vec{e}_3'$ -Achse zusammenfallen und somit ϕ und ψ Drehungen um dieselbe Achse beschreiben. Deswegen kann $\phi(t) = 0$ gesetzt werden und wir erhalten

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \frac{M_0}{\Theta_3} t^2.$$

Das Drehmoment bewirkt also eine beschleunigte Rotation um die Drehachse.

3. Bewegungsgleichung für einen umfallenden Bleistift.

- (a) Zeige, dass ein dünner Stab der Länge L bezüglich des Schwerpunktes das Trägheitsmoment $\Theta_S = m L^2/12$ hat (genauer $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_S$ und $\Theta_3 = 0$).

Lösung: Wir wählen als KS das Hauptachsensystem (Symmetrieachsen), damit der Trägheitstensor diagonal ist. Weiter benützen wir Zylinderkoordinaten

$$\Theta_1 = \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi r (z^2 + r^2 \cos^2 \phi) = \frac{L^2}{12} m + \frac{R^2}{4} m.$$

Aus Symmetriegründen gilt $\Theta_2 = \Theta_1$ und weiter erhalten wir aus einer ähnlichen Rechnung $\Theta_3 = mR^2/2$. Da der Stab sehr dünn ist, können Terme mit R^2 vernachlässigt werden und somit folgt die Behauptung. Wir hätten das Resultat auch aus dem Trägheitstensor für den Quader (Serie 6, Aufgabe 5) ablesen können, indem man den Limes $a, b \rightarrow 0$ nimmt.

- (b) Gib die Lagrange-Funktion im Schwerpunktssystem an. In diesem System besteht die Bewegung aus einer Rotation um den Schwerpunkt sowie einer Bewegung des Schwerpunktes.

Lösung: Als verallgemeinerte Koordinate verwenden wir den Winkel φ zwischen Stab/Bleistift und der Normalen des Tisches. Die potentielle Energie ist dann gegeben durch

$$U = mgh = mg \cos \varphi \frac{L}{2},$$

die Translationsenergie (Bewegung des Schwerpunktes) durch

$$T_{\text{trans}} = \frac{m}{2} \left(\dot{\varphi} \frac{L}{2} \right)^2$$

und die Rotationsenergie durch

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta_S}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2 m}{24} \dot{\varphi}^2.$$

Wir erhalten somit für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} - U = \frac{L^2 m}{6} \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \frac{L}{2}.$$

- (c) Gib die Lagrange-Funktion des Bleistifts im Bezugssystem des Tisches an. In diesem System ist die Bewegung eine reine Rotation um den Endpunkt. Achtung: das zugehörige Trägheitsmoment ist nicht gleich Θ_S , kann aber aus diesem mit dem Satz von Steiner hergeleitet werden.

Lösung: Im Bezugssystem des Tisches haben wir keine Translationsenergie. Das Trägheitsmoment Θ^T ist aber um $L/2$ verschoben, nach dem Satz von Steiner ist es gegeben durch

$$\Theta_1^T = \Theta_2^T = \Theta_S + m \frac{L^2}{4} = \frac{L^2 m}{3} \quad \text{und} \quad \Theta_3^T = \Theta_3 = 0.$$

Wir erhalten also für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T_{\text{rot}} - U = \frac{1}{2} \frac{L^2 m}{3} \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \frac{L}{2} = \frac{L^2 m}{6} \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \frac{L}{2}.$$

- (d) Was ist die Geschwindigkeit des Bleistiftspitzes beim Aufprall, wenn der Bleistift in Ruhe aus der Vertikalen losgelassen wird. (Damit er überhaupt fällt darf der Stift anfangs nicht exakt vertikal stehen, was aber in der Praxis immer erfüllt ist.)

Lösung: Wir betrachten das System wiederum im Bezugssystem des Tisches. Energieerhaltung liefert folgende Gleichung

$$E_{\text{rot}}(\text{Ende}) = E_{\text{pot}}(\text{Anfang}),$$

wobei

$$E_{\text{rot}}(\text{Ende}) = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{L^2 m}{3} \right)$$

und

$$E_{\text{pot}}(\text{Anfang}) = mgh = mg \frac{L}{2}.$$

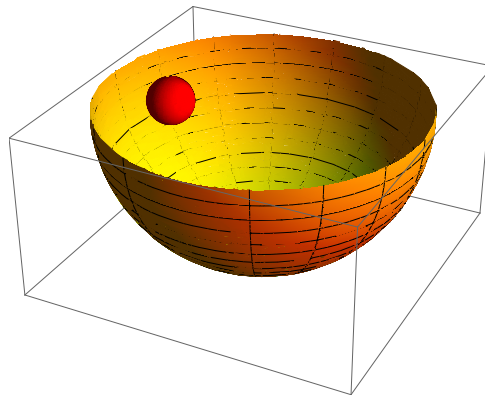
wir erhalten also

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Es gilt ausserdem $v_{\text{Spitze}} = L \omega$ woraus wir dann die Geschwindigkeit beim Aufprall ablesen können

$$v_{\text{Spitze}} = \sqrt{3gL}.$$

4. Eine kleine Kugel mit Radius r und Masse M rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer Kugelschale mit Radius $R \gg r$ herum.



- (a) Berechne das Trägheitsmoment der Kugel.

Lösung: Das Trägheitsmoment einer Kugel ist diagonal mit $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta$. Wir können also für eine beliebige Komponente das Trägheitsmoment berechnen

$$\Theta = \rho_0 \int d^3r (x^2 + y^2) = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^r dr' r'^2 \sin\theta (r'^2 \sin^2(\theta)) = \frac{2}{5}mr^2.$$

- (b) Wähle geeignete Koordinaten und stelle die Lagrange-Funktion auf.

Lösung: Wir wählen das Koordinatensystem in der Mitte der Kugelschale mit den Winkeln φ und θ als Koordinaten. In diesem System besteht die Bewegung aus der Schwerpunktsbewegung und aus der Rotation der Kugel um den Schwerpunkt. Die Bewegung des Schwerpunktes sowie die potentielle Energie kann analog zur Aufgabe 1.(a) aus Serie 6 hergeleitet werden und ergibt

$$T_{\text{trans}} = \frac{m}{2} v_S^2 = \frac{m}{2} (R-r)^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2) \approx \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2)$$

$$U = mg(R-r) \cos(\theta) \approx mgR \cos(\theta),$$

wobei im zweiten Schritt jeweils die Näherung $r \ll R$ angewendet wurde. Um die Rotationsenergie zu berechnen, verwenden wir, dass über die

Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S die Winkelgeschwindigkeit der kleinen Kugel gegeben ist, $v_S = r\omega$. Somit erhält man

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta}{2} \omega^2 = \frac{\Theta}{2} \frac{v_S^2}{r^2} = \frac{\Theta}{2} \frac{R^2}{r^2} (\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\varphi}^2)$$

und der Lagrangian lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} - U = \left(\frac{m}{2} R^2 + \frac{\Theta}{2} \frac{R^2}{r^2} \right) (\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\varphi}^2) - mgR \cos(\theta) \\ &= \frac{7}{10} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\varphi}^2) - mgR \cos(\theta). \end{aligned}$$

- (c) Welches sind die erhaltenen Grössen? Zeige, dass man mit diesen das Problem auf die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung zurückführen kann.

Lösung: Der Lagrangian ist unabhängig von der Zeit t und vom Winkel φ , somit haben wir zwei Erhaltungsgrössen: die Energie E und der Drehimpuls in z -Richtung L_z :

$$\begin{aligned} E &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} + U = \frac{7}{10} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)^2 \dot{\varphi}^2) + mgR \cos(\theta) = \text{konst} \\ L_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{5} m R^2 \sin(\theta)^2 \dot{\varphi} = \text{konst}. \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung können wir mithilfe der zweiten $\dot{\varphi}$ ersetzen und erhalten somit eine Differentialgleichung 1. Ordnung

$$E = \frac{7}{10} m R^2 \dot{\theta}^2 + L_z^2 \frac{5}{2m R^2 \sin(\theta)^2} + mgR \cos(\theta).$$