Mechanik II — Serie 9

Hamiltonformalismus, Poissonklammer — Lösung

1. Betrachte eine schiefe Ebene, deren Winkel $\alpha = \omega t$ proportional zur Zeit anwächst und eine Masse m, die unter dem Einfluss der Schwerkraft diese Ebene reibungsfrei herunterrutscht. In Serie 3 haben wir die zugehörige Lagrangefunktion bestimmt:

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\omega^2) - mgs\sin(\omega t)\,,$$

wobei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke ist.

(a) Bestimme den Hamiltonian. Wie lauten die kanonischen Gleichungen?

Lösung: Der generalisierte Impuls ist gegeben durch

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{s} = \frac{p}{m}\,.$$

Dies ergibt den Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \dot{s}(p) \cdot p - \mathcal{L}(s, \dot{s}(s,p,t), t) = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2}s^2\omega^2 + mgs\sin(\omega t)$$

und die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = ms\omega^2 - mg\sin(\omega t),$$
$$\dot{s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

(b) Ist der Hamiltonian $\mathcal{H}$ gleich der Energie E?

Lösung: Für dieses System entspricht der Hamiltonian nicht der Energie $E = T + U$. Da

$$\mathcal{L} = T - U \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H} = \dot{s} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - (T - U) \tag{1}$$

müssen wir nur $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\dot{s} \stackrel{?}{=} 2T$ überprüfen. Wir finden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\dot{s} = m\dot{s}^2 \neq m\dot{s}^2 + m\dot{s}^2\omega^2 = 2T\,,$$

für $m, \omega \neq 0$ und $\dot{s} \neq 0$ bzw. $s(t)$ nicht konstant.
Somit ist im allgemeinen $\mathcal{H} \neq T + U$.

(c) Setze $g = 0$ und betrachte das Problem ohne Schwerkraft. Ist der Hamiltonian oder die Energie erhalten?

Lösung: Betrachten wir das System ohne Schwerkraft, fällt der explizit zeitabhängige Term ($mgs\sin(\omega t)$) weg und somit ist der Hamiltonian erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\dot{s} - \mathcal{L}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right]\dot{s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\ddot{s} - \frac{d}{dt}[\mathcal{L}(s,\dot{s},t)] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right]\dot{s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\ddot{s} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\ddot{s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s}\right)}_{=0\ \text{(E.-L.-Gl.)}}\dot{s}\ \underbrace{-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}}_{=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=0} = 0\,.
\end{aligned}$$

Obwohl $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$, ist die Energie nicht erhalten, da $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}}\dot{s} - \mathcal{L} \neq E$.
Man erhält dieses Resultat auch durch explizites Ausrechnen. Die Energie kann geschrieben werden als

$$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\omega^2) = \mathcal{H} + m\omega^2 s^2. \tag{2}$$

Wir wissen, dass $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$, also gilt

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(m\omega^2 s^2) = 2m\omega^2 s\dot{s}. \tag{3}$$

Die Energie ist (für $m, \omega \neq 0$) nur dann erhalten, wenn $s(t)$ konstant ist für alle t bzw. $\dot{s}(t) = 0$, d.h. wenn sich die Masse für alle Zeiten im Stillstand befindet. In dem Fall können wir unsere Koordinatensystem auch mit $s(t) = 0$ wählen und wie wir in b) gesehen haben gilt dann auch tatsächlich $\mathcal{H} = E$.

2. In der Vorlesung haben wir überprüft, dass

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) - q\,\phi(\vec{r},t)$$

die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im elektromagentischen Feld liefert. Bestimme die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ zu diesem Lagrangian.

Lösung: Die generalisierten Impulse sind

$$p_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_j} = m\dot{r}_j + qA_j \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j)$$

und der Hamilton lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} - \mathcal{L} &= \frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\vec{p} - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 - \frac{q}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)\vec{A} + q\phi \\
&= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi.
\end{aligned}$$

3. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \qquad\qquad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$$

aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

folgen. Leite nun umgekehrt die Euler-Lagrange Gleichungen aus den kanonischen Gleichungen her, um zu beweisen, dass die beiden equivalent sind.

Lösung: Wir beachten, dass im Hamiltonformalismus $\dot{q}$ immer als Funktion von q, p und t aufgefasst wird, also $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$. Wir wissen, dass

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{4}$$

Alternativ kann man diese Aussage auch aus der ersten kanonischen Gleichung herleiten. Die Relation

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}[\dot{q}_i \cdot p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t)] = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \cdot p_i + \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k},$$

ergibt nach Subtraktion von $\dot{q}_k$ auf beiden Seiten Gleichungen (4).
Nun betrachten wir die zweite kanonische Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}[\dot{q}_i \cdot p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t)] = -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \cdot p_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \cdot p_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + p_i \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k},\end{aligned}$$

wobei Gleichung (4) verwendet wurde. Durch nochmaliges Verwenden von (4) erhalten wir die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt}p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}.$$

4. Poissonklammern

   (a) Berechne $\{q_i, p_j^4\}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\{q_i, p_j^4\} &= \sum_{n=1}^{f}\left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_n}}_{\delta_{in}}\underbrace{\frac{\partial p_j^4}{\partial p_n}}_{\delta_{jn}4p_j^3} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_n}\frac{\partial p_j^4}{\partial q_n}}_{=0}\right) \\ &= \delta_{ij}\, 4\, p_j^3.\end{aligned} \tag{5}$$

(b) Betrachte $A \equiv A(p,q)$ und $B \equiv B(p,q)$. Zeige, dass

$$\{A,H\} = 0 \text{ und } \{B,H\} = 0 \rightarrow \{\{A,B\},H\} = 0\,.$$

D.h. auch $\{A,B\}$ ist eine erhaltene Grösse. *Hinweis:* Die Poisson-Klammer erfüllt die Jakobi-Identität

$$\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0\,.$$

Lösung: Wir setzen $C = H$ in der Jakobi-Identiät und erhalten mit

$$\{A,B\} = -\{B,A\}\,, \tag{6}$$

dass

$$\begin{aligned}\{\{A,B\},H\} &= -\{\{B,H\},A\} - \{\{H,A\},B\} \\ &= -\{\underbrace{\{B,H\}}_{=0},A\} + \{\underbrace{\{A,H\}}_{=0},B\} = 0\,.\end{aligned} \tag{7}$$

(c) Kartesische Koordinaten $\vec{r}$. Berechne die Poissonklammer $\{r_i, L_j\}$, wobei $\vec{L}$ der Drehimpulsvektor ist.

Lösung: Der Drehimpulsvektor ist gegeben durch

$$L_j = \epsilon_{jmk} r_m p_k\,. \tag{8}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\{r_i, L_j\} &= \sum_{n=1}^{3} \left(\underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial r_n}}_{\delta_{in}} \underbrace{\frac{\partial L_j}{\partial p_n}}_{\epsilon_{jmn} r_m} - \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial p_n}}_{=0} \frac{\partial L_j}{\partial r_n} \right) \\ &= \epsilon_{jmi}\, r_m\,.\end{aligned} \tag{9}$$

5. Gegeben sei die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \kappa\, p_1 q_2 + p_2^2\right) - \frac{m\omega^2}{2} q_2^2\,.$$

(a) Was ist die zugörige Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q,\dot{q})$?

Lösung: Aus

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \tag{10}$$

folgt

$$p_1 = \dot{q}_1 m - \frac{\kappa q_2}{2}, \qquad p_2 = \dot{q}_2 m\,. \tag{11}$$

Somit erhalten wir für die zugehörige Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}\\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2} q_2\, \dot{q}_1 + q_2^2 \left(\frac{\kappa^2}{8m} + \frac{m\omega^2}{2}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

(b) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen?

Lösung: Da q_1 zyklisch ist, gilt

$$C_1 = m\dot{q}_1 - q_2 \frac{\kappa}{2}\,. \tag{13}$$

Für q_2 erhalten wir

$$m\ddot{q}_2 = -\frac{\kappa}{2}\dot{q}_1 + q_2 \left(\frac{\kappa^2}{4m} + m\omega^2\right). \tag{14}$$

(c) Was sind die erhaltenen Grössen?

Lösung: Die Konstante C_1 aus 5.(b) ist eine erhaltene Grösse und weiter, da $\mathcal{L}$ nicht explizit zeitabhänging ist,

$$C_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - q_2^2 \left(\frac{\kappa^2}{8m} + \frac{m\omega^2}{2}\right). \tag{15}$$

6. Betrachte die Funktion $f(u) = u^2\,(1 + u/3)$ für $u > 0$.

(a) Berechne die zugehörige Legendre Transformierte $g(p)$, mit $p = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Lösung: Es gilt

$$p = \frac{\partial f}{\partial u} = 2u + u^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = -1 + \sqrt{1+p}\,,$$

wobei nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung angegeben ist, da $u > 0$. Wir erhalten somit für die Legendre Transformierte

$$g(p) = p \cdot u(p) - f(u(p)) = \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{1+p}\right)\left(\sqrt{1+p} - 1 - 2p\right).$$

(b) Berechne danach die Legendre Transformierte der Funktion $g(p)$ und verifiziere, dass bei dieser zweiten Transformation wieder die ursprüngliche Funktion f herauskommt.

Lösung: Für die Rücktransformation berechnen wir erst

$$u = \frac{\partial g}{\partial p} = -1 + \sqrt{1+p} \qquad \Rightarrow \qquad p = 2u + u^2\,,$$

und weiter

$$f(u) = u \cdot p(u) - g(p(u)) = u^2(1 + u/3).$$