Mechanik II FS22

Formelsammlung 2. Juni 2022

Formalismen

Langrange-Formalismus 1. Art

Betrachte ein System von N Massenpunkten in drei Dimensionen, deren Koordinaten $x_n(t)$ durch R holonome Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0\,, \quad \text{mit} \quad \alpha = 1, \ldots, R\,, \tag{1}$$

eingeschränkt sind. Die Lagrangegleichungen erster Art lauten

$$m_n\,\ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\,, \quad \text{mit} \quad n = 1, \ldots, 3N\,. \tag{2}$$

Die $3N + R$ Gleichungen (1) und (2) legen mit geeigneten Anfangsbedinungen die Koordinaten $x_n(t)$ und die Lagrange Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t)$ fest. F_n ist die n-te Komponente der gesamten externen Kraft.

Langrange-Formalismus 2. Art

Betrachte ein System mit $f = 3N - R$ Freiheitsgraden. Führe verallgemeinerte Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_f)$ ein, in welchen die Zwangsbedingungen erfüllt sind. Drücke die kinetische Energie T und die potentielle Energie U durch diese Koordinaten aus. Die Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)\,. \tag{3}$$

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\,, \quad \text{mit} \quad k = 1, \ldots, f\,. \tag{4}$$

Hamilton-Formalismus

Die Hamiltonfunktion erhält man aus der Lagrangefunktion mittels der Legendre Transformation

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)\,, \tag{5}$$

wobei die verallgemeinerten Impulse durch

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t) \tag{6}$$

gegeben sind. Invertieren der Relationen (6) liefert $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)$. Die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{7}$$

sind equivalent zu den Bewegungsgleichungen (4).

Die Zeitabgängigkeit einer beliebigen Funktion $F \equiv F(q,p,t)$ ist durch

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{8}$$

gegeben, wobei die Possionklammer zweier Funktionen $A \equiv A(q,p,t)$ und $B \equiv B(q,p,t)$ als

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{9}$$

definiert ist.

Der Vektorraum der verallgemeinerten Orte und Impulse heisst *Phasenraum*. Der *Satz von Liouville* besagt, dass das Zustandsvolumen im Phasenraum bei der Evolution mit den kanonischen Gleichungen erhalten bleibt. Wird eine Zustandsdichte $\rho = \rho(q,p,t)$ im Phasenraum betrachtet so lautet das Theorem

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \tag{10}$$

Variationsrechnung

Variation ohne Nebenbedingung

Das Minimum $\bar{y}(x)$ des Funktionals

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x) \tag{11}$$

ist invariant unter kleinen Variationen $y \to \bar{y} + \delta y$

$$\delta J = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Falls $F(y, y')$ unabhängig von x ist, gilt die Beltrami-Identität (vgl. Energieerhaltung)

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = \text{const.}\,, \tag{13}$$

sodass man statt (12) nur eine Gleichung erster Ordnung lösen muss.

Variation mit Nebenbedingung

Um das Minimum $\bar{y}(x)$ des Funktionals

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x) \qquad \text{mit} \qquad K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G(y, y', x) = K_0 = \text{konst} \tag{14}$$

zu finden, löst man die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right) . \tag{15}$$

Dies liefert $\bar{y} \equiv \bar{y}(x, \lambda)$. Die Bedingung $K[\bar{y}(x, \lambda)] = K_0$ liefert dann den Wert von λ, welcher die Lösung von (14) ergibt.

Hamiltonsches Prinzip

Die Variation der Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{16}$$

liefert die Lagrange Gleichungen

$$\delta S = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \, . \tag{17}$$

Theorem von Noether

Zu einer infinitesimalen Symmetrietransformation

$$t \to t^* = t + \epsilon\, \varphi(q, \dot{q}, t) \, , \tag{18}$$

$$q_i(t) \to q_i^*(t^*) = q_i(t) + \epsilon\, \psi_i(q, \dot{q}, t) \, . \tag{19}$$

welche die Wirkung bis auf eine Konstante invariant lässt, d.h.

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^*\, \mathcal{L}(q^*, \dot{q}^*, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) = S + \text{const.} \tag{20}$$

gehört eine Grösse

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) \varphi - f(q, t) = \text{const.} \, , \tag{21}$$

die während der Bewegung konstant ist.

Starrer Körper

Winkelgeschwindigkeit und Eulerwinkel

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System (KS) mit Basisvektoren $\vec{e}_j^{\,\prime}$ sind

$$\omega_k' = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\dot{\vec{e}}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_j^{\,\prime} \,.$$

Die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem starren Körpers ist

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{22}$$

wobei $\vec{v}_O$ die Geschwindigkeit des Ursprungs des KS und $\vec{r}$ der Vektor vom Ursprung zum Punkt ist.

Die Ausrichtung eines starren Körpers kann durch die drei Eulerwinkel angegeben werden. Diese Winkel definieren eine Matrix, welche die Achsen des Inertialsystems auf diejenigen des KS rotiert:

$$R(\phi,\theta,\psi) = R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\phi) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - c_\theta s_\phi s_\psi & c_\psi s_\phi + c_\theta c_\phi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\theta c_\psi s_\phi - c_\phi s_\psi & c_\theta c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -c_\phi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \tag{23}$$

wobei $c_\phi = \cos(\phi)$, $s_\phi = \sin(\phi)$, etc. Ausgedrückt durch die Eulerwinkel lautet die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1' = \dot{\phi}\, s_\theta\, s_\psi + \dot{\theta}\, c_\psi \qquad \omega_2' = \dot{\phi}\, s_\theta\, c_\psi - \dot{\theta}\, s_\psi \qquad \omega_3' = \dot{\phi}\, c_\theta + \dot{\psi}\,.$$

Schwerpunkt und Trägheitstensor

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V d^3r\,\rho(\vec{r})\,\vec{r}\,, \qquad \Theta_{ik} = \int_V d^3r\,\rho(\vec{r})\left(\vec{r}^{\,2}\,\delta_{ik} - r_i\,r_k\right)\,. \tag{24}$$

Der Trägheitstensor ist symmetrisch und kann diagonalisiert werden. Das Koordinatensystem in dem der Tensor diagonal ist heisst das Hauptachsensystem und die Diagonalelemente Θ_1, Θ_2 und Θ_3 Hauptträgheitsmomente.

Der Trägheitstensor eines Körpers für Rotationen um den Schwerpunkt sei Θ_{ij}. Der *Satz von Steiner* liefert den Trägheitstensor Θ_{ij}' für Rotationen um einen Punkt O', der bezüglich des Schwerpunkts um $\vec{a}$ verschoben ist:

$$\Theta_{ij}' = \Theta_{ij} + M\left(\vec{a}^{\,2}\delta_{ij} - a_i\,a_j\right)\,.$$

Kinetische Energie und Drehimpuls

Wird der Nullpunkt des körperfesten Systems im Schwerpunkt gewählt, gilt

$$\begin{aligned} T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} M \vec{v}_0^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} m_\nu \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{ik} \omega_i' \omega_k' \,, \\ \vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu &= L_i' \, \vec{e}_i^{\,\prime} = \Theta_{ik} \omega_k' \, \vec{e}_i^{\,\prime} \,, \end{aligned} \tag{25}$$

wobei N für die Anzahl Punktmassen im System steht.

Euler-Gleichungen

Die Eulergleichungen gelten im Hauptachsensystem

$$\begin{aligned} \Theta_1 \, \dot{\omega}_1' + (\Theta_3 - \Theta_2) \; \omega_2' \omega_3' &= M_1' \,, \\ \Theta_2 \, \dot{\omega}_2' + (\Theta_1 - \Theta_3) \; \omega_1' \omega_3' &= M_2' \,, \\ \Theta_3 \, \dot{\omega}_3' + (\Theta_2 - \Theta_1) \; \omega_1' \omega_2' &= M_3' \,. \end{aligned} \tag{26}$$

Auf der rechten Seite finden sich die Komponenten des totalen Drehmoments

$$\vec{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \,, \tag{27}$$

wo $\vec{F}_\nu$ die totale Kraft auf den ν-ten Massenpunkt ist und $\vec{r}_\nu$ der Vektor vom Ursprung des KS zum Massenpunkt.

Vektoren und Koordinaten

Komponentenschreibweise

Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \,, \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \,. \tag{28}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{nmk} = \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn} \,. \tag{29}$$

Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = r \left(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta\right) \,. \tag{30}$$

$$\int d^3 r = \int dr \, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \,. \tag{31}$$