Quantentheorie III — Lösung zu Serie 12

Streuung — 16. 12. 2020

1. Das optische Theorem besagt, dass der totale Streuquerschnitt gleich dem Imaginärteil der Vorwärtsamplitude ist, genauer

   $$\sigma = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}[f(\theta = 0)] \ .$$

   Leite das Theorem her, indem Du zunächst den totalen Wirkungsquerschnitt

   $$\sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|a_l|^2$$

   und die Streuamplitude

   $$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l P_l(\cos\theta)$$

   mittels

   $$a_l = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l \tag{1}$$

   durch die Streuphasen δ_l ausdrückst. Beachte, dass $P_l(1) = 1$.

   Wir berechnen den Imaginärteil der Vorwärtsamplitude und finden

   $$\begin{aligned}\mathrm{Im} f(\theta = 0) &= \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin\delta_l P_l(1)\ \mathrm{Im}\ e^{i\delta_l} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l.\end{aligned}$$

   Aus (1) ist $|a_l| = \frac{\sin\delta_l}{k}$ und damit

   $$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \\ &= \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im} f(\theta = 0)\end{aligned}$$

2. Betrachte das Potential

   $$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a \le x \le 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

   welches mit einer “Mauer” bei $x = 0$ endet. Wir hatten in der Vorlesung argumentiert, dass eine einlaufende Welle in so einem Potential vollständig reflektiert wird und sich die Wellenfunktion des reflektierten Teilchens bei grossem negativen x nur um eine Phase von der einlaufenden unterscheiden kann.

a.) Löse die Schrödingergleichung. Benutze die Form

$$\psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx}$$

für die Region $x < -a$, mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Welche Form hat die Lösung im Bereich $-a < x < 0$? Welche Bedingungen müssen bei $x = -a$ und $x = 0$ erfüllt sein?

Die Schrödinger Gleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - V)\,\psi.$$

Die entsprechende Lösung ist

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < -a \\ Ce^{i\tilde{k}x} + De^{-i\tilde{k}x} = \tilde{C}\cos\tilde{k}x + \tilde{D}\sin\tilde{k}x & -a < x < 0, \end{cases}$$

wobei $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\tilde{k} = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$.
Die Bedingung bei $x = 0$ ist

$$\psi(0) = \tilde{C} \stackrel{!}{=} 0.$$

Bei $x = -a$ muss die Wellenfunktion stetig und differenzierar sein, d.h.

$$\begin{aligned} Ae^{-ika} + Be^{ika} &= -\tilde{D}\sin\tilde{k}a \\ ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} &= \tilde{D}\tilde{k}\cos\tilde{k}a. \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungsystem und finden

$$B = Ae^{-2ika}\left(\frac{k - i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}{k + i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}\right).$$

b.) Zeige, dass $|A| = |B|$, d.h. dass wie erwartet nur eine Phasenverschiebung auftritt.

Man sieht leicht, dass wie erwartet, nur eine Phasenverschiebung auftritt:

$$|B| = |A|\left|\frac{k - i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}{k + i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}\right| = |A|\,.$$

Deshalb können wir die Wellenfunction im Bereich $x < -a$ als

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{2i\delta - ikx}\right) \tag{2}$$

schreiben.

c.) Berechne die Phase für einen tiefen Potentialtopf mit $V_0 \gg E$, i.e. entwickle das allgemeine Resultat für die Streuphase um $k = 0$.

In unserem Fall haben wir für $\tilde{k} \gg k$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A\left(e^{ikx} + e^{-2ika}\left(\frac{k - i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}{k + i\tilde{k}\cot\tilde{k}a}\right)e^{-ikx}\right)\\ &\approx A\left(e^{ikx} - e^{-2ika}e^{-ikx}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

Durch den Vergleich von (2) und (3) finden wir die Streuphase

$$\delta_0 = -ka.$$

3. Betrachte Streuung an einem Gauss-Potential

$$V(\vec{r}) = V_0\, e^{-\mu^2\vec{r}^2}$$

a.) Berechne in der Bornschen Näherung

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}V(\vec{r})$$

die Streuamplitude. Drücke das Resultat durch $k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$ und den Streuwinkel θ aus.

Hinweis: Werte das Integral im Bezugssystem mit $\vec{k}' - \vec{k} = \kappa\,(0,0,1)$ aus. Beachte, dass $\kappa = 2k\sin\frac{\theta}{2}$.

In der Bornschen Näherung lautet die Streuamplitude

$$\begin{aligned}f(\theta) &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\int d^3\vec{r}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}e^{-\mu^2\vec{r}^2}\\ &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi} d\phi\, r^2\sin\theta' e^{i\kappa r\cos\theta'}e^{-\mu^2r^2}\\ &= -\frac{mV_0}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\int_{-1}^1 dz\, r^2 e^{i\kappa r\, z}e^{-\mu^2r^2}\\ &= -\frac{2mV_0}{\kappa\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r\sin\kappa r e^{-\mu^2r^2}\end{aligned}$$

Um diese Integral zu berechnen, verwenden wir eine partielle Integration:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{2mV_0}{\kappa\hbar^2}\int_0^\infty dr\,\sin\kappa r\frac{1}{2\mu^2}\frac{d\,e^{-\mu^2r^2}}{dr}\\ &= \frac{mV_0}{\kappa\hbar^2\mu^2}\sin\kappa r e^{-\mu^2r^2}\Big|_0^\infty - \frac{mV_0}{\kappa\hbar^2\mu^2}\int_0^\infty dr\, e^{-\mu^2r^2}\frac{d\,\sin\kappa r}{dr}\\ &= 0 - \frac{mV_0}{\hbar^2\mu^2}\int_0^\infty dr\, e^{-\mu^2r^2}\cos\kappa r\\ &= -\frac{mV_0}{\hbar^2\mu^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2\mu}e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}} = -\frac{\sqrt{\pi}mV_0}{2\hbar^2\mu^3}e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}} = -\frac{\sqrt{\pi}mV_0}{2\hbar^2\mu^3}e^{\frac{-4k^2\sin^2\theta/2}{4\mu^2}}\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Hinweis verwendet haben.
Um die letzte Integral zu berechnen, haben wir die Variablentransformation $\tilde{r} = r \pm \frac{i\kappa}{2\mu^2}$ durchgeführt, um das Quadrat zu ergänzen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dr\, e^{-\mu^2 r^2} \cos \kappa r &= \int_0^\infty dr\, e^{-\mu^2 r^2} \frac{e^{i\kappa r} + e^{-i\kappa r}}{2} \\ &= \int_0^\infty d\tilde{r}\, e^{-\mu^2 \tilde{r}^2} e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu} e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}}.\end{aligned}$$

Beachte, dass man auch in kartesiche Koordinaten arbeiten kann. In diesem Fall ist die Streuamplitude

$$\begin{aligned}f(\theta) &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r} e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}} e^{-\mu^2 \vec{r}^2} \\ &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty dx e^{-\mu^2 x^2} \int_0^\infty dy e^{-\mu^2 y^2} \int_0^\infty dz e^{i\kappa z} e^{-\mu^2 z^2} \\ &= -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}} = -\frac{\sqrt{\pi} m V_0}{2\hbar^2 \mu^3} e^{\frac{-\kappa^2}{4\mu^2}}\end{aligned}$$

b.) Rechne den totalen Wirkungsquerschnitt aus.
Hinweis: Für die Winkelintegration ist es nützlich $y = \sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ einzuführen und die Integration auf

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta) = \int_{-1}^1 d\cos\theta = 2\int_0^1 dy$$

umzuschreiben.

Wir drücken den differentiellen Wirkungsquerschnitt als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

aus, wobei Ω den dreidimensionalen Raumwinkel beschreibt. Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, verwenden wir den Hinweis und erhalten

$$\begin{aligned}\sigma &= \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= \frac{\pi m^2 V_0^2}{4\hbar^4 \mu^6} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{\frac{-2k^2 \sin^2\theta/2}{\mu^2}} \\ &= \frac{\pi^2 m^2 V_0^2}{\hbar^4 \mu^6} \int_0^1 dy\, e^{\frac{-2k^2 y}{\mu^2}} \\ &= \frac{\pi^2 m^2 V_0^2}{\hbar^4 \mu^6} \frac{\mu^2}{2k^2} \left(1 - e^{\frac{-2k^2}{\mu^2}}\right) \\ &= \frac{\pi^2 m^2 V_0^2}{2\hbar^4 \mu^4 k^2} \left(1 - e^{\frac{-2k^2}{\mu^2}}\right).\end{aligned}$$