1. Ideales Bose-Gas. N und V seien gegeben. Grundzustand ($T = 0$)? Entropie, Energie im Grundzustand?
2. Beweise die folgende Gleichung:

$$\frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right)^\ell .$$

3. Konvergiert die Summe $N = (V/\lambda^3) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3/2} \exp(l\beta\mu)$ immer?
4. Alternative Berechnung von

$$N_{\max}^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \Big|_{\mu=0}$$

für freie Bosonen mit $\epsilon = \vec{p}^2/2m$.

- (a) Schreibe die Summe als Integral über den Phasenraum und integriere das Volumen aus.
- (b) Transformiere das d^3p -Integral in Kugelkoordinaten und substituiere $p^2/2mk_B T$ durch z^2 .
- (c) Schreibe den Faktor $1/(1 - e^{-z^2})$ im Integranden als Taylorreihe in e^{-z^2} und führe das dz -Integral danach aus.
- (d) Verwende die Definition der Riemann Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} .$$

5. Berechne die innere Energie eines idealen Bose-Gases als Funktion der Temperatur T , sowohl für $T \leq T_c$ als auch für $T > T_c$.
- (a) Berechne zuerst die Energiebeiträge der angeregten Zustände,

$$E(T, V, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \langle \nu_i \rangle = \frac{3k_B T V}{2\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(\beta\mu l)}{l^{5/2}} .$$

- (b) Wieso gilt obige Formel auch für $T < T_c$? Setze nun $\mu = 0$, um die Energie für $T \leq T_c$ zu erhalten, und interpretiere das Resultat.

(c) Für $T > T_c$ benutzen wir zusätzlich den Ausdruck für die Teilchenzahl,

$$N = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(\beta\mu l)}{l^{3/2}},$$

um $\mu = \mu(T, v)$ zu bestimmen und so $E = E(T, V, N)$ zu erhalten. Falls in den Summen über l nur der erste Term $l = 1$ berücksichtigt wird (0. Ordnung), erhält man $E = 3Nk_B T/2$. Wie lautet der Ausdruck, wenn man Terme bis und mit $l = 2$ berücksichtigt (1. Ordnung)?

(d) Skizziere die hergeleiteten Funktionen.

6. Berechne aus dem Resultat der vorhergehenden Aufgabe die spezifische Wärme $c_V(T)$ als Funktion der Temperatur T für die beiden Fälle $T \leq T_c$ und $T > T_c$. Skizziere die Temperaturabhängigkeit.
7. Bestimme den Druck des Bosegases als Funktion der Teilchenzahl und diskutiere den Beitrag der kondensierten Teilchen.