

1. Werte die in der Vorlesung hergeleiteten allgemeinen Ausdrücke $\mu(T), E(T)$ und $C_V(T)$ in der Sommerfeld-Näherung für die Zustandsdichte $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$ freier, nicht-relativistischer Teilchen aus. Interpretiere die Resultate und skizziere die Temperaturabhängigkeiten.

2. Reproduziere numerisch die exakten Funktionen für $\mu(T), E(T)$ und $C_V(T)$.

3. Fermidruck:
 - (a) Berechne den Druck eines nicht-relativistischen Fermigases.
 - (b) Berechne die mittlere Energie pro Teilchen im Grundzustand für die Zustandsdichte $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$.
 - (c) Bestimme den Druck des Fermigases für $T \rightarrow 0$.
 - (d) Wie gross ist der Fermidruck in einem typischen Metall?

4. Bei der Herleitung der Planckschen Strahlungsformel war essentiell, dass Photonen Bosonen sind. Wir wollen nun dieselbe Rechnung für Neutrinos durchführen. Wie die Photonen sind Neutrinos praktisch masselos, d.h. wir können $E = \hbar\omega$ benutzen. Zudem haben die Neutrinos zwei 'Polarisationen', da es Neutrinos und Anti-Neutrinos gibt. Allerdings sind die Besetzungszahlen für die Neutrinos nur $n(\vec{k}) \in \{0, 1\}$, da es sich um Fermionen handelt.
 - (a) Berechne die 1-Teilchen-Zustandssumme für Neutrinos.
 - (b) In Analogie zur Rechnung mit den Photonen leite das Analogon zur Planckschen Strahlungsformel für Neutrinos her, d.h. die Verteilung der Energiedichte pro Frequenzintervall $d\rho(\omega)/d\omega$ als Funktion der Temperatur T .
 - (c) Integriere $d\rho(\omega)/d\omega$ über alle Frequenzen und leite das Analogon zum Stefan-Boltzmann-Gesetz für Fermionen her.
 - (d) Berechne die Teilchenzahldichte $n = \langle N \rangle / L^3$ für Neutrinos.
 - (e) Im frühen Universum muss entsprechend der kosmischen Hintergrundstrahlung der Photonen eine kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung entstanden sein. Die entsprechende Temperatur der Strahlung beträgt $T_\nu = 1.96$ K. Wie viele Neutrinos existieren folglich in unserem Universum pro cm^3 ?

Hinweis: Benutze die folgenden Ausdrücke für die Integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3),$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120}, \quad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x + 1} = \frac{3\zeta(3)}{2}.$$