Statistische Thermodynamik II — Serie 8

Weisser Zwerg, Neutrinostrahlung — 29. November 2021

1. Fermidruck in einem Weissen Zwerg:
   Bestimme den Fermidruck
   $$P_0 = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_F} mc^2 \frac{(p/mc)^2}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} p^2 dp$$
   mithilfe des Ausdrucks
   $$\frac{dE_0}{dV} = \int_0^{p_F} (\epsilon(p) - \epsilon_F)\, \frac{8\pi p^2}{h^3} dp\,.$$
   Benutze dazu $dp^3/3 = p^2 dp$, partielle Integration sowie die relativistische Dispersionsrelation $\epsilon(p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$.

2. Kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung:
   Behandle Neutrinos als masselose, relativistische Fermionen mit einem vernachlässigbaren chemischen Potential ($\mu \ll k_\mathrm{B}T$) und Spin $S = 1/2$.

   (a) Berechne die Teilchen- und Energiedichte.

   (b) Für relativistische Teilchen gilt die Zustandsgleichung $p = 1/3\rho$, wobei ρ die Energiedichte ist. Zeige, dass damit die Entropie
   $$S = \frac{4}{3}\frac{\rho}{T}L^3$$
   lautet.

   (c) Berechne nun mit Hilfe der oben berechneten Energiedichte die Gesamtentropie eines Teilchensystems bestehend aus Photonen γ, Elektronen e, Positronen $\overline{e}$ und den drei Neutrino-Arten ν_e, ν_μ und ν_τ.

   (d) Das Universum kühlt sich durch Expansion ab und die Neutrinos entkoppeln wegen ihrer schwachen Wechselwirkung mit den anderen Teilchen bei einer bestimmten Temperatur T kurz nach dem Urknall. Die weitere Expansion des Universums $L \to L'$ führt zur Temperatur T_ν:
   $$T_\nu L' = T L\,.$$

   (e) Die Photonen entkoppeln später als die Neutrinos. In der Zwischenzeit hat sich ihre Temperatur wegen der Elektron-Positron-Annihilation $e + \overline{e} \to \gamma + \gamma$, bzw. wegen der Entropieänderung $S_e + S_{\overline{e}} \to S_\gamma$ auf T_γ erhöht. Berechne die Gesamtentropie des Systems zu diesem Zeitpunkt.

   (f) Mit Hilfe der Entropieerhaltung kann nun das Verhältnis zwischen der Temperatur T_ν der kosmischen Neutrino-Hintergrundstrahlung und derjenigen der Photonen T_γ bestimmt werden.

   (g) Bestimme schliesslich die heutige Temperatur der Neutrino-Hintergrundstrahlung T_ν aus dem Wert der Photonen-Hintergrundstrahlung $T_\gamma = 2.7$ K.

U. Wenger