

1. Zeige, dass

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\{-p^2/2mkT\} = \frac{1}{\lambda^3},$$

wobei $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi mkT}$ die thermische Wellenlänge ist.

Lösung: Das Integral kann in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-p^2/2mkT} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dp p^2 e^{-p^2/2mkT} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-p^2/2mkT}. \end{aligned}$$

Es bleibt ein bekanntes Gaussintegral und wir erhalten

$$\frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 e^{-p^2/2mkT} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2mkT)^{\frac{3}{2}} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{\lambda^3}.$$

2. (a) Ist ^4He ein Bose-Gas? ^3He ?

Lösung: ^4He ist mit Gesamtkernspin $s = 4 \times 1/2 = 2$ ein Bose-Gas. Das viel seltener in der Natur vorkommende ^3He ($s = 3/2$) ist hingegen ein Fermi-Gas.

(b) Bei welcher Temperatur werden die Unterschiede in der Statistik bedeutend? Untersuche die Frage für eine Dichte von 0.14g/cm^3 (flüssiges Helium).

Lösung: Sobald die Bedingung $V/N \gg \lambda^3$ nicht mehr gilt, müssen wir mit Unterschieden rechnen. Bei Gleichheit

$$\lambda_c^3 \approx \frac{V}{N} = \frac{m}{\rho},$$

wobei m die Masse eines Teilchens ist, definieren wir die kritische Temperatur

$$T_c \approx \frac{2\pi\hbar^2(\rho/m)^{2/3}}{mk_B}$$

unterhalb derer sicher Unterschiede zutage treten. Wir benutzen die Heliummasse von $m = 4 \text{ u} = 6.6 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ ($1 \text{ u} = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) und finden $T_c \approx 5.82 \text{ K}$.

(c) Bildet der Sauerstoff der Atmosphäre ein dünnes Quantengas? Die Leitelektroden eines Metalles? Die Elektronen und Protonen im Zentrum der Sonne?

Lösung:

Sauerstoff der Atmosphäre: Luftdichte: $\rho_{\text{Luft}} = 1.293 \text{ kg/m}^3$,

Massenanteil Sauerstoff: $n_{O_2} = 23.14\%$,

Molmasse Sauerstoff: $m_{O_2} = 16 \text{ g/mol}$.

Daraus folgt

$$\rho_{O_2} = n_{O_2} \rho_{\text{Luft}} = 0.3 \text{ kg/m}^3$$

und somit

$$T_c \approx 9.6 \text{ mK}.$$

Der Sauerstoff der Atmosphäre ist ein dünnes Quantengas.

Leitelektronen eines Metalles am Beispiel Kupfer: Ein Elektron pro Atom im Leitungsband,

Dichte Kupfer: $\rho_{Cu} = 8.9 \text{ g/cm}^3$,

Masse Kupferkern: $m_{Cu} = 64 \text{ u}$,

Elektronmasse: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Daraus folgt

$$\rho_e = \rho_{Cu} \frac{m_e}{m_{Cu}} = 0.08 \text{ kg/m}^3$$

und somit

$$T_c \approx 1.1 \cdot 10^5 \text{ K}.$$

Die Leitelektronen bilden ein dichtes Quantengas, für welches die Quantenstatistik relevant ist.

Elektronen und Protonen im Zentrum der Sonne: Dichte der Sonne im Kern: $\rho = 1.5 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$,

Temperatur im Kern: $T = 1.6 \cdot 10^7 \text{ K}$ ($\rightarrow$ Plasma),

Hauptbestandteile Photosphäre: $n_H = 92\%$ Wasserstoff, $n_{(^4He)} = 8\%$ Helium (Annahme ähnliche Zusammensetzung im Kern),

Masse Heliumkern: $m_{(^4He)} \approx 4 \text{ u}$.

Daraus folgt

$$\rho_p = n_p \rho = n_H \rho = 140 \text{ g/cm}^3,$$

$$\rho_e = n_p \rho \frac{m_e}{m_p} + n_{(^4He)} \rho \frac{2m_e}{m_{(^4He)}} = 79 \text{ kg/m}^3$$

und somit

$$T_{c,p} \approx 5700 \text{ K} \ll T_{\text{Kern}}$$

$$T_{c,e} \approx 1.1 \cdot 10^7 \text{ K} \approx T_{\text{Kern}}.$$

Während die Protonen ein dünnes Quantengas bilden, dürfte sich die Fermi-Statistik bei den Elektronen bemerkbar machen.

3. Betrachte die zwei Elektronen eines He-Atom (ohne Wechselwirkung), welche zwei unterschiedliche räumliche Wellenfunktionen $\phi_{100}(x)$ und $\phi_{200}(x)$ einnehmen.

- (a) *Konstruiere die möglichen vier antisymmetrischen Wellenfunktionen, indem du die räumlichen und die Spin-Wellenfunktionen entsprechend kombinierst.*

Lösung: Da die örtlichen Wellenfunktionen unterschiedlich sind, sind alle möglichen Spin-Wellenfunktionen erlaubt (das heisst Singlett und Triplet Zustände, da wir von zwei Elektronen sprechen), angenommen dass wir die Wellenfunktionen korrekt kombinieren (symmetrisch · antisymmetrisch). Die möglichen Zustände sind

Singlett (Gesamtspin $S = 0$):

$$(\phi_{100}(x_1)\phi_{200}(x_2) + \phi_{100}(x_2)\phi_{200}(x_1)) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle), \quad s_z = 0,$$

Triplet (Gesamtspin $S = 1$):

$$(\phi_{100}(x_1)\phi_{200}(x_2) + \phi_{100}(x_2)\phi_{200}(x_1)) \times \begin{cases} |\uparrow_1\uparrow_2\rangle, & s_z = +1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle), & s_z = 0, \\ |\downarrow_1\downarrow_2\rangle, & s_z = -1. \end{cases}$$

- (b) *Gib für jeden Zustand den Gesamtspin S und die z -Komponente s_z des Spins an.*

Lösung: Siehe oben.

4. *Betrachte die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon_{\vec{p}} = \epsilon_p = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ und vereinfache die Beziehung*

- (a) *im hoch-relativistischen Limes $cp \gg mc^2$,*

Lösung: Wir entwickeln $\frac{1}{cp} \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = \sqrt{1 + \alpha}$ für kleine α :

$$\epsilon_p = cp \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) = cp + \frac{m^2c^3}{2p} + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

- (b) *im nicht-relativistischen Limes $mc^2 \gg pc$.*

Lösung: Wir entwickeln $\frac{1}{mc^2} \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = \sqrt{1 + \alpha}$ für kleine α :

$$\epsilon_p = mc^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \mathcal{O}(\alpha^2).$$