

1. Falls für Energie ϵ und Impuls $\vec{p}$ eines Einzelteilchens

$$\epsilon \propto |\vec{p}|^n$$

gilt, so kann ein einfacher Zusammenhang zwischen der Energie E und des Druckes P des idealen Gases gefunden werden. Im Folgenden versuchen wir diesen herzuleiten.

- (a) Die diskreten Impulskomponenten p_x, p_y und p_z erfüllen bekanntlich $p_k \propto 1/L_k$ für Seitenlängen L_k eines Systems. Leite daraus den Exponenten α des Zusammenhangs $|\vec{p}| \propto V^\alpha$ her.

Lösung: Vereinfachend nehmen wir $L_x = L_y = L_z = L$ an. Damit wird $|\vec{p}| \propto 1/L = V^{-1/3}$, also $\alpha = -\frac{1}{3}$. Dies lässt sich auf beliebige Volumen verallgemeinern, da wir davon ausgehen, dass das Verhalten des thermodynamischen Systems nur vom Volumen abhängig ist und nicht von dessen genauer definierten Geometrie.

In der Tat, im thermodynamischen Limit nehmen wir an, dass $V \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, V/N = \text{const.}$, so dass die Geometrie des Volumens nicht relevant ist und wir O.b.d.A. annehmen können, dass $V = L^3$.

- (b) Berechne den Druck mit

$$P(U, V) = -\frac{\partial U}{\partial V} = -\sum_{\vec{p}} \frac{\partial \epsilon_{\vec{p}}}{\partial V} \langle \nu_{\vec{p}} \rangle.$$

Damit haben wir die thermische Zustandsgleichung $P(T, V, N)$ direkt mit Hilfe der kalorischen $U(T, V, N)$ ausgedrückt.

Lösung: Durch die angenommene Proportionalität der Energie zum Impuls und des Impulses zum Volumen, gilt für eine geeignete Funktion $C = C(S, N)$ die Gleichheit $\epsilon_{\vec{p}} = C \cdot (V^\alpha)^n$. Also ist

$$\frac{\partial \epsilon_{\vec{p}}}{\partial V} = \frac{\partial C V^{n\alpha}}{\partial V} = n\alpha \frac{C V^{n\alpha}}{V} = n\alpha \frac{\epsilon_{\vec{p}}}{V}.$$

Damit wird der in der Aufgabe gegebene Ausdruck zu

$$P(U, V) = -\frac{n\alpha}{V} \sum_{\vec{p}} \epsilon_{\vec{p}} \langle \nu_{\vec{p}} \rangle = -n\alpha \frac{U}{V} = \frac{n}{3} \frac{U}{V}.$$

- (c) Argumentiere, wieso die Besetzungszahlen ν in obigem Ausdruck nicht von V abhängig sind, da diese Annahme dem gegebenen Ausdruck offensichtlich zugrunde liegt.

Lösung: Bei der quasistatischen, adiabatischen Änderung des Volumens, wie sie beim Bilden der partiellen Ableitung $\partial U/\partial V|_{S,N}$ passiert, behalten alle Teilchen ihre Zustände bei. Nur die jeweilige Energie der Zustände wird stetig verändert, ohne dass sich dabei die Besetzungszahlen ändern.

Bei einer Änderung von S (einer Wärmezufuhr) würden jedoch auch die Besetzungszahlen verändert.

Siehe dazu z.B. das Kapitel “The Adiabatic Approximation” im Buch “Introduction to Quantum Mechanics” von D. J. Griffiths.

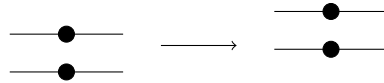


Abbildung 1: Die Energieniveaus verändern sich, aber die Besetzungszahlen nicht.

- (d) Betrachte die beiden Extremfälle nichtrelativistischer Teilchen mit $\epsilon = p^2/2m$ und hochrelativistischer Teilchen mit $\epsilon = cp$. Wie lautet der Druck P nach vorheriger Teilaufgabe hier? Gib Beispiele von thermodynamischen Systemen für beide Fälle an.

Lösung: Beim nichtrelativistischen Fall mit $n = 2$ erhalten wir den bekannten Zusammenhang $P = \frac{2}{3} U/V$. Beispiele sind einatomige Gase bei Raumtemperatur oder Elektronen.

Für relativistische Gase mit $n = 1$ gilt $P = \frac{1}{3} U/V$. Photonen, Phononen und hochrelativistische Teilchen mit $p \gg mc$ sind hier mögliche Kandidaten.

2. Betrachte ein System mit zwei Teilchen und zwei möglichen Einteilchenzuständen der Energie $\epsilon = 0$ und $\epsilon = \epsilon_0$. Sofern die Teilchen Spin haben, soll er in z -Richtung ausgerichtet sein, also $s_z = s$.
- (a) Stelle die möglichen Zustände des Systems für den klassischen Fall (Maxwell-Boltzmann-Statistik), für $s = 0$ (Bose-Einstein-Statistik) und $s = 1/2$ (Fermi-Dirac-Statistik) grafisch dar.

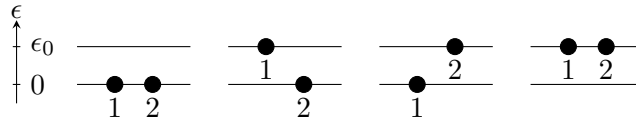


Abbildung 2: Klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik

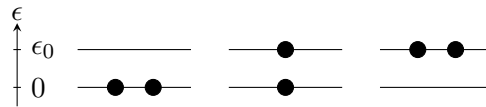


Abbildung 3: Bose-Einstein-Statistik für $s = 0$

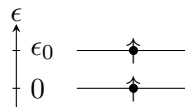


Abbildung 4: Fermi-Dirac-Statistik für $s = \frac{1}{2}$

(b) *Gib die daraus folgenden kanonischen Zustandssummen an.*

Lösung:

Klassische Maxwell-Boltzmann-Statistik:

$$Z_{\text{klass}} = 1 + 2 e^{-\beta\epsilon_0} + e^{-2\beta\epsilon_0} .$$

Bose-Einstein-Statistik:

$$Z_{(s=0)} = 1 + e^{-\beta\epsilon_0} + e^{-2\beta\epsilon_0} .$$

Fermi-Dirac-Statistik:

$$Z_{(s=1/2)} = e^{-\beta\epsilon_0} .$$

(c) *Wiederhole die Aufgabe mit drei anstelle von zwei Teilchen.*

Lösung: Der Übersichtlichkeit halber sind die Zustände in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die graphische Darstellung erschliesst sich analog wie in Teilaufgabe (a).

Die ununterscheidbaren Quantenteilchen in Tabelle (b) sind nur mit “Q” bezeichnet im Gegensatz zu den durchnummerierten Teilchen in der klassischen Statistik in Tabelle (a).

Für die Fermi-Dirac-Statistik müssten mindestens zwei der drei spin-up Fermionen in den gleichen Zustand, dies ist aber wegen dem Pauli-Prinzip verboten.

Die Zustandssummen sehen nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} Z_{\text{klass}} &= 1 + 3 e^{-\beta\epsilon_0} + 3 e^{-2\beta\epsilon_0} + e^{-3\beta\epsilon_0} , \\ Z_{(s=0)} &= 1 + e^{-\beta\epsilon_0} + e^{-2\beta\epsilon_0} + e^{-3\beta\epsilon_0} . \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe: Fermi-Dirac-Statistik dreier Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen mit beliebigem s_z .

$\epsilon = 0$	$\epsilon = \epsilon_0$
1,2,3	
2,3	1
1,3	2
1,2	3
1	2,3
2	1,3
3	1,2
	1,2,3

(a) Klass. Maxwell-Boltzmann-Statistik

$\epsilon = 0$	$\epsilon = \epsilon_0$
Q,Q,Q	
Q,Q	Q
Q	Q,Q
	Q,Q,Q

(b) Bose-Einstein-Statistik für $s = 0$ Teilchen

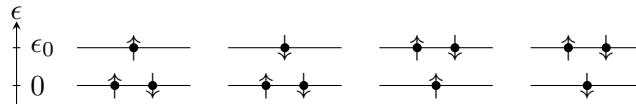


Abbildung 5: Fermi-Dirac-Statistik für $s = \frac{1}{2}$, s_z beliebig

$\epsilon = 0$	$\epsilon = \epsilon_0$
$\uparrow, \downarrow$	$\uparrow$
$\uparrow, \downarrow$	$\downarrow$
$\uparrow$	$\uparrow, \downarrow$
$\downarrow$	$\uparrow, \downarrow$

$$Z_{(s=\frac{1}{2}, s_z \text{ beliebig})} = 2 \left(e^{-\beta\epsilon_0} + e^{-2\beta\epsilon_0} \right).$$

3. Die grosskanonische Zustandsumme eines einzelnen Zustandes i der Energie ϵ_i lässt sich schreiben als

$$z_i(T, \mu) = \sum_{\nu} e^{\nu\beta(\mu - \epsilon_i)},$$

wobei man über alle zugelassenen Besetzungszahlen ν summiert.

- (a) Drücke damit die grosskanonische Zustandsumme des Gesamtsystems

$$Z(T, \mu) = \sum_r e^{-\beta\epsilon_r + \beta\mu N_r} = \sum_{\nu_0, \nu_1, \dots} e^{-\beta(\nu_0\epsilon_0 + \nu_1\epsilon_1 + \dots) + \beta\mu(\nu_0 + \nu_1 + \dots)}$$

aus. Dies ist eine rein algebraische Aufgabe.

Lösung:

$$\begin{aligned} Z(T, \mu) &= \sum_{\nu_0} e^{-\beta(\nu_0\epsilon_0 - \mu\nu_0)} \sum_{\nu_1} e^{-\beta(\nu_1\epsilon_1 - \mu\nu_1)} \dots \\ &= \prod_i \sum_{\nu_i} e^{-\beta(\nu_i\epsilon_i - \mu\nu_i)} = \prod_i z_i. \end{aligned}$$

- (b) Berechne $z_i(T, \mu)$ explizit für einen Zustand der Energie $\epsilon > \mu$ für jeweils ein aus Bosonen und Fermionen bestehendes Gas.

Lösung:

Bosonen: Alle Besetzungszahlen sind erlaubt. Die geometrische Summe ergibt

$$z_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \right)^{\nu} = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}}.$$

Fermionen: Die Zustände können maximal einfach belegt sein.

$$z_i = \sum_{\nu=0}^1 e^{\nu\beta(\mu-\epsilon_i)} = 1 + e^{\beta(\mu-\epsilon_i)}.$$

- (c) Überprüfe, dass die mittlere Besetzungszahl des Zustandes i geschrieben werden kann als

$$\langle \nu_i \rangle = \sum_{\nu} \nu p_i(\nu) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_i(T, \mu).$$

Benutze das Resultat aus (b) um dafür explizite Ausdrücke für Bosonen und Fermionen zu erhalten.

Lösung: Zur Überprüfung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_i(T, \mu) &= \frac{1}{\beta} \sum_{\nu} \nu \beta e^{\nu\beta(\mu-\epsilon_i)} \frac{1}{z_i(T, \mu)} \\ &= \frac{1}{z_i(T, \mu)} \sum_{\nu} \nu e^{\nu\beta(\mu-\epsilon_i)} = \langle \nu_i \rangle \end{aligned}$$

oder man identifiziert $-k_B T \ln z_i = J_i(T, V, \mu)$ mit dem grosskanonischen Potential J_i . Mit dem totalen Differential, welches wir von J_i kennen, erhalten wir

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_i(T, \mu) = -\frac{\partial J_i}{\partial \mu} = N_i = \langle \nu_i \rangle.$$

Einsetzen von $z_i(T, \mu)$ aus Teilaufgabe (b) gibt für

Bosonen:

$$\begin{aligned} \langle \nu_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(-\ln \left(1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \right) \right) = e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \left(1 - e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{e^{-\beta(\mu-\epsilon_i)} - 1}. \end{aligned}$$

Fermionen:

$$\begin{aligned} \langle \nu_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \left(1 + e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \right) = e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \left(1 + e^{\beta(\mu-\epsilon_i)} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{e^{-\beta(\mu-\epsilon_i)} + 1}. \end{aligned}$$

- (d) *Wieso verschwinden die Unterschiede zwischen der Bose- und Fermi-Statistik in der Grenze kleiner Besetzungszahlen? Verschwinden dabei auch die Unterschiede zwischen klassischer und Quantenstatistik?*

Lösung: Für kleine Besetzungszahlen $\langle \nu_r \rangle \ll 1$ lässt sich der Ausdruck

$$\langle \nu_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

als Reihenentwicklung um grosse x (also $x_0 \rightarrow \infty$) schreiben:

$$\frac{1}{x \pm 1} \approx \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Es gilt somit in guter Näherung

$$\langle \nu_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1} \approx e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}.$$

Für kleine Besetzungszahlen besteht also kein Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen mehr. Durch die niedrige Besetzungszahlen kommt das Pauli-Prinzip (Verbot zweier Fermionen im gleichen Zustand) nicht zur Geltung. Der Unterschied zwischen klassischer und Quantenstatistik bleibt jedoch bestehen! Dieser betrifft nämlich die Zählweise der Zustände der identischen, ununterscheidbaren Teilchen in der Zustandssumme.