1. *Werte die in der Vorlesung hergeleiteten allgemeinen Ausdrücke $\mu(T), E(T)$ und $C_V(T)$ in der Sommerfeld-Näherung für die Zustandsdichte $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$ freier, nicht-relativistischer Teilchen aus. Interpretiere die Resultate und skizziere die Temperaturabhängigkeiten.*

   Lösung: Die in der Vorlesung hergeleiteten Resultate für $\mu(T), E(T)$ und $C_V(T)$ lauten:

$$\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6\beta^2}\frac{\rho'(\epsilon_F)}{\rho(\epsilon_F)}\,, \qquad E(T) = E_0 + \frac{\pi^2 V}{6\beta^2}\rho(\epsilon_F)\,,$$
$$C_V = \frac{\partial E(T)}{\partial T} = k_B\frac{\pi^2 V}{3\beta}\rho(\epsilon_F)\,.$$

   Es sei nun anhand der Aufgabenstellung $\rho(\epsilon) = A\epsilon^{1/2}$. Dann gilt bei $T=0$

$$N = V\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\,\rho(\epsilon) = \frac{2}{3}VA\epsilon_F^{3/2} = \frac{2V}{3}\epsilon_F\,\rho(\epsilon_F)\,.$$

   Diese Gleichheit für $T \to 0$ bzw. $\epsilon \to \epsilon_F$ und die Annahme $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$ legen $\rho(\epsilon)$ fest:

$$\rho(\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon_F}\frac{N}{V}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}\,.$$

   Bei $T \to 0$ legt die Bedingung für N auch den Fermi-impuls $p_k = \hbar k_F$ und somit die Fermienergie fest

$$\begin{aligned} N &= \frac{2V\cdot 4\pi}{(2\pi)^3}\int dk\,k^2\langle n(\epsilon)\rangle \\ &\overset{T=0}{=} \frac{V}{\pi^2}\int_0^{k_F} dk\,k^2 = \frac{Vk_F^3}{3\pi^2}\,, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_F = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = (3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}\,. \end{aligned}$$

   Mit dem konkreten Ergebnis für $\rho(\epsilon)$ kann der Ausdruck $\rho'(\epsilon_F)/\rho(\epsilon_F)$ in der Gleichung für $\mu(T)$ bestimmt werden:

$$\frac{\rho'(\epsilon_F)}{\rho(\epsilon_F)} = \left.\frac{\rho'(\epsilon)}{\rho(\epsilon)}\right|_{\epsilon=\epsilon_F} = \frac{1}{2\epsilon_F}\,.$$

   Dies in die Gleichung von $\mu(T)$ eingesetzt führt zum Resultat

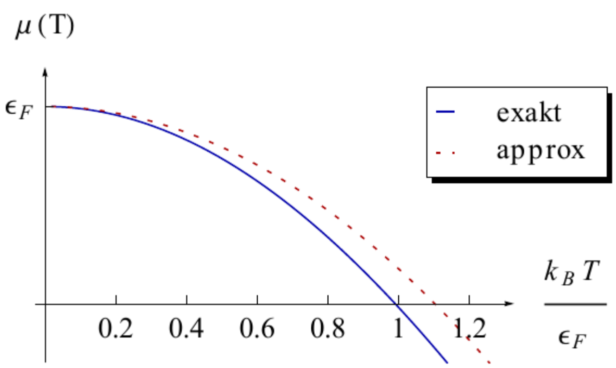
$$\mu(T) = \epsilon_F\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2\right)\,.$$

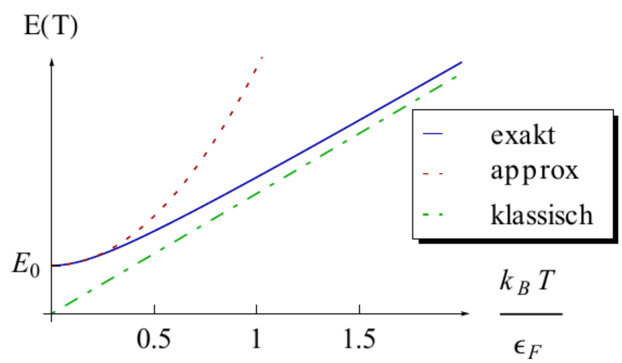
Es gilt also die Approximation $\rho(\mu) = \rho(\epsilon_F) + \mathcal{O}((k_B T/\epsilon_F)^2)$. Setzen wir das nun in die Ausdrücke für die Energie und die spezifische Wärmekapazität ein, dann finden wir in erster Näherung

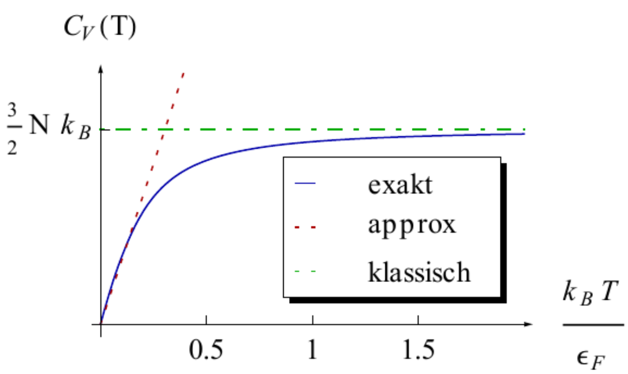
$$E = E_0 + \frac{N\pi^2}{4}\frac{(k_B T)^2}{\epsilon_F} + \mathcal{O}\big((\beta\epsilon_F)^{-4}\big)\,, \qquad C_V = \frac{N k_B \pi^2}{2}\frac{k_B T}{\epsilon_F} + \mathcal{O}\big((\beta\epsilon_F)^{-3}\big)\,,$$

wobei E_0 die Grundzustandsenergie bzw. die Gesamtenergie des Systems im Grundzustand bezeichnet,

$$E_0 = \frac{3}{5}N\epsilon_F\,.$$







In obigen Graphiken sind die exakten Kurven sowie die eben hergeleiteten Näherungen, welche für kleine Energien $k_B T \ll \epsilon_F$ gültig sind, dargestellt. Wie man deutlich erkennen kann, sind die hergeleiteten Näherungen nur bis ca. 10% der Fermienergie ϵ_F gültig, d.h. $k_B T/\epsilon_F \lesssim 0.1$. Für die exakten Lösungen müssen numerische Methoden hinzugezogen werden.

Die Energieapproximation erklärt sich grob wie folgt: Nur der Bruchteil $\mathcal{O}(k_B T/\epsilon_F)$ aller N Teilchen kann thermisch über die Grundzustandsenergie E_0 hinaus in höhere Energiezustände angeregt werden, mit einer zusätzlichen Energie ΔE, welche im Mittel von der Grössenordnung $\mathcal{O}(k_B T)$ ist.

Vergleicht man die spezifische Wärmekapazität $C_V = \frac{\pi^2}{3}\frac{3}{2}Nk_B\frac{k_BT}{\epsilon_F}$ des Fermigases bei niedrigen Temperaturen mit dem klassischen Ausdruck für die spezifische Wärmekapazität $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$, so ist klar, dass das Fermigas bei sehr niedrigen Temperaturen (temperaturabhängig) viel weniger Wärme aufnehmen kann. Bei höheren Energien nähert sich der exakte Ausdruck der Energie und der spezifischen Wärmekapazität jeweils wieder dem klassischen Verhalten an.

2. *Reproduziere numerisch die exakten Funktionen für $\mu(T)$, $E(T)$ und $C_V(T)$.*

Lösung: Wir wissen, dass die mittlere Anzahl von Fermionen in einem Einteilchenzustand beschrieben wird durch

$$\langle n(\epsilon)\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} .$$

Aus Aufgabe 1 kennen wir die Zustandsdichte für freie nicht-relativistische Teilchen

$$\rho(\epsilon) = \frac{3}{2}\frac{N}{V\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}} .$$

Wir betrachten nun einzeln und im Detail die drei Funktionen $\mu(T)$, $E(T)$ und $C_V(T)$:

- Wir konzentrieren uns zuerst auf die Funktion $\mu(T)$ und erhalten für die Teilchenzahlgleichung mit Hilfe der genannten Gleichungen für $\langle n(\epsilon)\rangle$ und $\rho(\epsilon)$

  $$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \int_0^\infty d\epsilon\, \rho(\epsilon)n(\epsilon) = \int_0^\infty d\epsilon\, \frac{3}{2}\frac{N}{V\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} , \\ \Leftrightarrow \qquad 1 &= \int_0^\infty d\epsilon\, \frac{3}{2}\frac{1}{\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}\frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_BT}}+1} . \end{aligned}$$

  Unter der Annahme dass N/V konstant bleibt unter Temperaturänderungen, ergibt sich daraus eine Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T)$. Wir finden sofort, dass bei $T = 0$ die Bedingung $\mu = \epsilon_F$ gilt:

  $$1 \overset{T=0}{=} \int_0^\infty d\epsilon \frac{3}{2}\frac{1}{\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}\theta(\mu-\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon \frac{3}{2}\frac{1}{\epsilon_F}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}} = \left(\frac{\mu}{\epsilon_F}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

  Allerdings können wir die Gleichung für allgemeine T nicht analytisch nach $\mu(T)$ auflösen. Wir drücken die ursprüngliche Gleichung für eine allgemeine Temperatur T in Einheiten der Fermienergie aus, d. h. wir normieren alle Energieskalen mit ϵ_F, und es ergibt sich

  $$1 = \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon_F}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_F}}\frac{1}{e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}}e^{\frac{\epsilon-\mu}{\epsilon_F}}+1} .$$

  Damit ist die nun gesuchte Grösse $\mu(T)/\epsilon_F$ dimensionslos und es eignet sich deren Temperaturabhängigkeit graphisch darzustellen.

Um die Funktion $\mu(T)/\epsilon_F$ zu zeichnen, geben wir ein bestimmtes T, genauer k_BT/ϵ_F, vor und fragen nach dem Wert von μ/ϵ_F, welcher im Integral stehen muss, damit die Gleichung erfüllt ist. Dies kann dann für beliebige k_BT/ϵ_F getan werden und wir erhalten so die gewünschte Funktion $\mu(T)/\epsilon_F$. Mit Hilfe von `Mathematica` oder einem ähnlichen Programm lassen sich solche numerische Integrationen einfach durchführen. Die Fermienergie ϵ_F muss in einem numerischen Integral natürlich auch in einer expliziten Form vorgegeben werden. Es gilt wie oben gezeigt $\mu(T=0)/\epsilon_F = 1$. Die exakte Lösung kann schliesslich noch mit der Näherung

$$\frac{\mu(T)}{\epsilon_F} = 1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^4\right)$$

bei kleinen Temperaturen $k_BT/\epsilon_F \ll 1$ verglichen werden. Damit ist die Figur für $\mu(T)$ in Aufgabe 1 reproduziert.

- Die zweite gesuchte Funktion ist die Energie $E(T)$ pro Teilchen, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{N}{V}E(T) = \int_0^\infty d\epsilon\, \epsilon\rho(\epsilon)\langle n(\epsilon)\rangle$$

Auch hier wird die Energie in Einheiten der Fermienergie ausgedrückt, und wir erhalten die dimensionslose Grösse

$$\frac{E(T)}{\epsilon_F} = \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon_F}\frac{3}{2}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{3/2}\frac{1}{e^{\frac{\epsilon_F}{k_BT}}e^{\frac{\epsilon-\mu}{\epsilon_F}}+1}\,.$$

Um $E(T)/\epsilon_F$ für eine vorgegebene Temperatur zu erhalten, müssen wir zuerst $\mu(T)/\epsilon_F$ finden, welches wie oben beschrieben durch numerische Integration und Lösen der Integral-Gleichung bestimmt wird. Damit berechnet man das Integral in der Gleichung für $E(T)/\epsilon_F$ numerisch. Auch dieses Resultat ist in Aufgabe 1 mit der Sommerfeld-Näherung

$$\frac{E(T)}{\epsilon_F} = \frac{E_0}{\epsilon_F} + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k_BT}{\epsilon_F}\right)^4\right)$$

verglichen, wobei E_0 die Grundzustandsenergie angibt. Für die Grundzustandsenergie in Einheiten von ϵ_F berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{E_0}{\epsilon_F} &= \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon_F}\frac{3}{2}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{3/2}\theta(\mu-\epsilon)\\ &= \int_0^{\mu=\epsilon_F}\frac{d\epsilon}{\epsilon_F}\frac{3}{2}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{3/2} = \int_0^1 dx\,\frac{3}{2}x^{3/2} = \frac{3}{5}\,.\end{aligned}$$

Zusätzlich ist in der dazugehörigen Figur in Aufgabe 1 noch die bekannte klassische Lösung $E(T)/\epsilon_F = \frac{3}{2}\frac{k_BT}{\epsilon_F}$ dargestellt, welche erst bei höheren Temperaturen eine genügend gute Approximation ist.

- Die spezifische Wärmekapazität $C_V(T)$ pro Teilchen ist gegeben durch

$$c_V = \frac{C_V}{N} = \left.\frac{\partial E(T)}{\partial T}\right|_V = k_B \left.\frac{\partial E(k_B T)}{\partial(k_B T)}\right|_V = k_B \left.\frac{\partial\left(\frac{E(k_B T)}{\epsilon_F}\right)}{\partial\left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)}\right|_V .$$

  Die natürliche Einheit für c_V ist also k_B, i.e. c_V/k_B ist dimensionslos. Verwenden wir für $E(T)$ den hergeleiteten Ausdruck ergibt sich

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon_F} \frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{3/2} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} e^{\frac{\epsilon-\mu}{\epsilon_F}} + 1} .$$

  Das Integral ist nichts anderes als die Energie $E(T)$, welche wir schon berechnet haben. Es empfiehlt sich eine numerische Ableitung durchzuführen, da wir nicht nur explizite Abhähngigkeiten von T haben, sondern auch das chemische Potential bei festgehaltener Dichte N/V temperaturabhängig ist. Dazu wählen wir einen genügend kleinen Temperaturunterschied Δ und erhalten eine Approximation für die Ableitung in der Form

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} \simeq \frac{E(x) - E(x+\Delta)}{\Delta} .$$

  Die Näherung von $c_V(T)$ für kleine Temperaturen ist aus Aufgabe 1 bekannt,

$$c_V(T)/k_B = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^3\right) ,$$

  und der klassische Ausdruck lautet $c_V(T)/k_B = 3/2$. Die klassische Lösung, die Sommerfeld-Näherung und die exakte Lösung sind wiederum in der Figur in Aufgabe 1 dargestellt.

3. *Fermidruck:*

   (a) *Berechne den Druck eines nicht-relativistischen Fermigases.*

   Lösung: Der Druck eines nicht-relativistischen Gases mit $\epsilon_p \propto p^2$ beträgt $P(T,V,N) = \frac{2}{3}\frac{E(T,V,N)}{V}$. Damit gilt für ein nicht-relativistisches Fermigas in der Sommerfeld-Näherung

$$P(T,V,N) = \frac{2E(T,V,N)}{3V} = \frac{2E_0(V,N)}{3V} + \frac{\pi^2}{6} \frac{N k_\mathrm{B} T}{V} \frac{k_\mathrm{B} T}{\epsilon_\mathrm{F}} ,$$

   wobei E_0 die Gesamtenergie des Systems im Grundzustand ist. Das exakte Resultat ist

$$P = \frac{2E}{3V} = \frac{2\epsilon_F}{3V} \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\epsilon_F} \frac{3}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_F}{k_B T}} e^{\frac{\epsilon-\mu(T)}{\epsilon_F}} + 1} .$$

(b) *Berechne die mittlere Energie pro Teilchen im Grundzustand für die Zustandsdichte $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$.*

Lösung: Für $\rho(\epsilon) \propto \sqrt{\epsilon}$ haben wir in Aufgabe 1 bereits berechnet, dass

$$\rho(\epsilon) = \frac{3}{2\epsilon_F}\frac{N}{V}\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_{\mathrm{F}}}}\,.$$

Damit erhalten wir die mittlere Energie pro Teilchen im Grundzustand wiefolgt:

$$\frac{E_0(V,N)}{N} = \int_0^\infty d\epsilon\,\frac{V\rho(\epsilon)}{N}\epsilon\theta(\mu-\epsilon) = \frac{V}{N}\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon\,\rho(\epsilon)\epsilon = \frac{3}{5}\epsilon_{\mathrm{F}}\,.$$

(c) *Bestimme den Druck des Fermigases für $T \to 0$.*

Lösung: Im Gegensatz zum idealen klassischen Gas oder zum idealen Bosegas geht der Druck des Fermigases für $T \to 0$ nicht gegen Null, sondern gegen den endlichen Wert

$$P_{\mathrm{Fermi}} = P(0,V,N) = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\,\epsilon_{\mathrm{F}} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{mv^{5/3}}\,,$$

welcher als Fermidruck bezeichnet wird. Der Fermidruck ist verantwortlich für die relative Inkompressibilität von flüssiger und fester Materie.

(d) *Wie gross ist der Fermidruck in einem typischen Metall?*

Lösung: Für typische Metalle ist die Grössenordnung der Fermienergie $\mathcal{O}(1\mathrm{eV})$ und diejenige von $v^{1/3}$ typischerweise $\mathcal{O}(10^{-10}\mathrm{m})$. Damit erhält man einen Fermidruck der Grössenordnung

$$\mathcal{O}(10^{29}\mathrm{eV/m^3} = 10^{10}\mathrm{Pa} = 10^5\mathrm{bar})\,.$$

Als Beispiel hat man für Kupfer $v = V/N = 12\mathring{\mathrm{A}}^3$. Mit der Masse m_e eines Elektrons erhält man $P_{\mathrm{Fermi}} = 3.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa}$.

4. *Bei der Herleitung der Planckschen Strahlungsformel war essentiell, dass Photonen Bosonen sind. Wir wollen nun dieselbe Rechnung für Neutrinos durchführen. Wie die Photonen sind Neutrinos praktisch masselos, d.h. wir können $E = \hbar\omega$ benutzen. Zudem haben die Neutrinos zwei 'Polarisationen', da es Neutrinos und Anti-Neutrinos gibt. Allerdings sind die Besetzungszahlen für die Neutrinos nur $n(\vec{k}) \in \{0,1\}$, da es sich um Fermionen handelt.*

(a) *Berechne die 1-Teilchen-Zustandssumme für Neutrinos.*

Lösung: Da Neutrinos Fermionen sind, gilt für diese Teilchen das Ausschliessungsprinzip von Pauli, wonach jeder Zustand höchstens einmal besetzt sein darf, d. h. $n(\vec{k}) \in \{0, 1\}$. Damit finden wir für die kanonische 1-Teilchen-Zustandssumme das Resultat

$$Z(\vec{k}) = \sum_{n(\vec{k})=0}^{1} e^{-\beta n(\vec{k})\hbar c|\vec{k}|} = 1 + e^{-\beta\hbar c|\vec{k}|} \,.$$

(b) *In Analogie zur Rechnung mit den Photonen leite das Analogon zur Planckschen Strahlungsformel für Neutrinos her, d.h. die Verteilung der Energiedichte pro Frequenzintervall $d\rho(\omega)/d\omega$ als Funktion der Temperatur T.*

Lösung: Als erstes berechnen wir die mittlere Energie eines Neutrinos:

$$\langle n(\vec{k})E(\vec{k})\rangle = \frac{1}{Z(\vec{k})} \sum_{n(\vec{k})=0}^{1} n(\vec{k})E(\vec{k})e^{-\beta n(\vec{k})\hbar c|\vec{k}|} = \frac{\hbar c|\vec{k}|}{e^{\beta\hbar c|\vec{k}|} + 1} \,.$$

Der einzige Unterschied zur entsprechenden Formel für die Photonen ist das *plus*-Zeichen im Nenner, an Stelle des *minus*-Zeichens. Durch den Vergleich mit der entsprechenden Rechnung für Photonen erhalten wir die Plancksche Strahlungsformel für Neutrinos,

$$\frac{d\rho(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} + 1} \,, \qquad \omega = c|\vec{k}| \,.$$

(c) *Integriere $d\rho(\omega)/d\omega$ über alle Frequenzen und leite das Analogon zum Stefan-Boltzmann-Gesetz für Fermionen her.*

Lösung: Unter Benutzung der angegebenen Integrale erhält man

$$\rho = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega) + 1} = \frac{7\pi^2 k_\mathrm{B}^4 T^4}{120\hbar^3 c^3} \,.$$

(d) *Berechne die Teilchenzahldichte $n = \langle N\rangle/L^3$ für Neutrinos.*

Lösung: Die Rechnung funktioniert analog zu derjenigen für die Photonen. Zuerst berechnen wir die mittlere Besetzungszahl pro Mode:

$$\langle n(\vec{k})\rangle = \frac{1}{Z(\vec{k})} \sum_{n(\vec{k})=0}^{1} n(\vec{k})e^{-\beta n(\vec{k})\hbar c|\vec{k}|} = \frac{1}{e^{\beta\hbar c|\vec{k}|} + 1} \,.$$

Dieses Resultat können wir nun über alle Impulse $\vec{k}$ integrieren und erhalten

$$n = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega} + 1} = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2 c^3} \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\hbar}\right)^3 \,.$$

(e) *Im frühen Universum muss entsprechend der kosmischen Hintergrundstrahlung der Photonen eine kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung entstanden sein.*

Die entsprechende Temperatur der Strahlung beträgt $T_\nu = 1.96$ K. Wie viele Neutrinos existieren folglich in unserem Universum pro cm^3?

Lösung: Wenn wir die Temperatur $T_\nu = 1.96$ K in der Formel oben einsetzen, erhalten wir die Anzahl Neutrinos pro Volumen,

$$n \simeq 116\,\mathrm{cm}^{-3}\,.$$

Hinweis: Benutze die folgenden Ausdrücke für die Integrale

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\,, \qquad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3)\,,$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x + 1} = \frac{7\pi^4}{120}\,, \qquad \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x + 1} = \frac{3\zeta(3)}{2}\,.$$

R. Moser