1. *Fermidruck in einem Weissen Zwerg:*
   Bestimme den Fermidruck

$$P_0 = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{(p/mc)^2}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} p^2 dp$$

mithilfe des Ausdrucks

$$\frac{dE_0}{dV} = \int_0^{p_F} \left(\epsilon(p) - \epsilon_F\right) \frac{8\pi p^2}{h^3} dp \,.$$

Benutze dazu $dp^3/3 = p^2 dp$, partielle Integration sowie die relativistische Dispersionsrelation $\epsilon(p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} P_0 = -\frac{dE_0}{dV} &= -\frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \left(\epsilon(p) - \epsilon_F\right) p^2 dp \\ &= \frac{8\pi}{h^3} \left(\epsilon_F \frac{1}{3} p_F^3 - \int_0^{p_F} \epsilon(p) p^2 dp \right) . \end{aligned}$$

Partielle Integration mit $u = \epsilon(p)$ und $v = p^3/3$ ergibt ($v' = p^2$)

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{8\pi}{h^3} \left(\frac{\epsilon_F \, p_F^3}{3} - \int_0^{p_F} uv' dp \right) = \frac{8\pi}{h^3} \left(\frac{\epsilon_F \, p_F^3}{3} - [uv]_0^{p_F} + \int_0^{p_F} u'v dp \right) \\ &= \frac{8\pi}{h^3} \left(\frac{\left(\epsilon_F - \epsilon(p_F)\right) p_F^3}{3} + \int_0^{p_F} u'v dp \right) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} u'v dp \,. \end{aligned}$$

Mit $u' = d\epsilon/dp = pc^2/\epsilon(p)$ und $\epsilon_F = \epsilon(p_F)$ ergibt dies

$$\begin{aligned} P_0 = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} u'v dp &= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} p^3 dp \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{(p/mc)^2}{\sqrt{1+(p/mc)^2}} p^2 dp \,. \end{aligned}$$

2. *Kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung:*
   Behandle Neutrinos als masselose, relativistische Fermionen mit einem vernachlässigbaren chemischen Potential ($\mu \ll k_B T$) und Spin $S = 1/2$.

(a) *Berechne die Teilchen- und Energiedichte.*

Lösung: Unter Berücksichtigung, dass der Helizitätsfaktor $g = 2$ beträgt, erhält man (siehe Serie 8)

$$n = 2\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\exp(\beta\hbar kc)+1} = \frac{3\zeta(3)(k_\mathrm{B}T)^3}{2\pi^2\hbar^3c^3}\,,$$
$$\rho = 2\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk k^2 \frac{\hbar kc}{\exp(\beta\hbar kc)+1} = \frac{7\pi^2(k_\mathrm{B}T)^4}{120\hbar^3c^3}\,.$$

(b) *Für relativistische Teilchen gilt die Zustandsgleichung $p = 1/3\rho$, wobei ρ die Energiedichte ist. Zeige, dass damit die Entropie*

$$S = \frac{4}{3}\frac{\rho}{T}L^3$$

lautet.

Lösung: Die Entropie in einem Volumen $V = L^3$ beträgt (es gilt $F = PV$, da grosskanonisches und kanonisches Ensemble identisch sind)

$$S = \frac{E-F}{T} = \frac{\rho+P}{T}L^3\,.$$

Für ein Gas aus relativistischen Teilchen (Bosonen oder Fermionen) ist die Energie und der Druck durch die Zustandsgleichung $P = \rho/3$ miteinander verbunden. Deshalb erhält man

$$S = \frac{4}{3}\frac{\rho}{T}L^3 = \frac{4}{3}\frac{\rho}{T}V\,.$$

(c) *Berechne nun mit Hilfe der oben berechneten Energiedichte die Gesamtentropie eines Teilchensystems bestehend aus Photonen γ, Elektronen e, Positronen $\overline{e}$ und den drei Neutrino-Arten ν_e, ν_μ und ν_τ.*

Lösung: Wenn jeder Teilchensorte eine separate Temperatur zugeordnet wird, erhält man für die gesamte Entropie

$$S = S_\gamma(T_\gamma) + S_e(T_e) + S_{\bar{e}}(T_{\bar{e}}) + \sum_{i=e,\mu,\tau} S_{\nu_i}(T_{\nu_i})$$

Im thermischen Gleichgewicht sind alle Temperaturen gleich, $T_i = T$. Wir nehmen an, dass alle Teilchen relativistisch sind, so dass das Resultat aus Aufgabe b) zutrifft. Zudem können wir die Elektronen und Positronen zusammenfassen, da sie indentisch behandelt werden können für die Rechnung. Wir benutzen die hergeleiteten Resultate für Photonen und Neutrinos, welche beide (praktisch) masselos

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2(k_BT)^4}{15\hbar^3c^3}\,, \quad \rho_\nu = \frac{7}{8}\frac{\pi^2(k_BT)^4}{15\hbar^3c^3}\,.$$

Die Energiedichte für die Elektronen und Positronen kann nicht in geschlossener Form hingeschrieben werden, wie wir in Serie 8 gesehen haben. Zu beachten ist auch, dass wir hier die relativistische Energie-Impuls-Relation benutzen müssen,

$$\epsilon_e(p) = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p^2}\,.$$

Die Energiedichte ist gegeben als

$$\rho_e(T) = \frac{E(T)}{V} = \frac{1}{V}\int_0^\infty d\epsilon\, \frac{3}{2}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F}\right)^{3/2} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu(T)}{k_B T}}+1}\,,$$

wobei die Fermienergie jetzt auch dem relativistischen Wert entspricht,

$$N = \frac{V k_F^3}{3\pi^2}\,, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_F = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2(\hbar k)^2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}\,.$$

Wir können natrlich die Energie entweder hochrelativistischen Limit $\epsilon = \hbar c|k|$ oder im non-relativistischen Limit $\epsilon = (\hbar|k|)^2/2m$ betrachten. Ersteres ist bei sehr hohen Energien/Temperaturen angemessen, was in unserem Fall (im frühen Universum) der Fall ist. Falls wir für die Elektronen den hochrelativistischen Limit annehmen, dann können wir auch die relativistische Energie-Impuls-Relation benutzen und somit gilt auch $P_e = \rho_e/3$. Im hochrelativistischen Limit können also die Elektronen identisch behandelt werden wie die Neutrinos. Beachte jedoch, dass diese Approximation wesentlich weniger lang gültig ist als ist für die Neutrinos. Das Resultat ist ($V = L^3$)

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4}{3}\frac{\rho_\gamma(T)}{T}V + \frac{4}{3}\sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{\rho_{\nu_i}(T)}{T}V + \sum_{j=e,\bar{e}} \frac{\rho_j(T)+P_j(T)}{T}V \\
&= L^3\left(\frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} + \sum_{i=e,\mu,\tau}\frac{7}{8}\frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} + \sum_{j=e,\bar{e}}\frac{\rho_j(T)+P_j(T)}{T}\right) \\
&\simeq \frac{4\pi^2 k_B^4 T^3}{45\hbar^3 c^3} L^3 \left(1 + \frac{7}{8}\sum_{i=e,\mu,\tau} + \frac{7}{8}\sum_{j=e,\bar{e}}\right) \\
&= \frac{4\pi^2 k_B^4 (TL)^3}{45\hbar^3 c^3}\left(\sum_{\substack{\text{Bosonen}\\ S=0}} + \frac{7}{8}\sum_{\substack{\text{Fermionen}\\ S=1/2}}\right),
\end{aligned}$$

(d) *Das Universum kühlt sich durch Expansion ab und die Neutrinos entkoppeln wegen ihrer schwachen Wechselwirkung mit den anderen Teilchen bei einer bestimmten Temperatur T kurz nach dem Urknall. Die weitere Expansion des Universums $L \to L'$ führt zur Temperatur T_ν:*

$$T_\nu L' = TL\,.$$

Lösung: Ungefähr eine Sekunde nach dem Urknall entkoppeln die Neutrinos und sind nicht mehr länger im thermischen Gleichgewicht mit den anderen Teilchen. Das Universum kühlt sich durch die Expansion ab, und zwar so, dass $TL = \text{const.}$ bleibt. Zum Zeitpunkt der Entkopplung haben alle Teilchen noch dieselbe Temperatur T, so dass die Entropie

$$S = \frac{4\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{45\hbar^3 c^3}(1 + \frac{7}{8}(3+2)(TL)^3 = \frac{4\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{45\hbar^3 c^3}(1 + \frac{35}{8})(TL)^3$$

lautet.

(e) *Die Photonen entkoppeln später als die Neutrinos. In der Zwischenzeit hat sich ihre Temperatur wegen der Elektron-Positron-Annihilation* $e + \overline{e} \to \gamma + \gamma$*, bzw. wegen der Entropieänderung* $S_e + S_{\overline{e}} \to S_\gamma$ *auf* T_γ *erhöht. Berechne die Gesamtentropie des Systems zu diesem Zeitpunkt.*

Lösung: Die Elektronen und Positronen sind alle annihiliert, dass heisst sie tragen auch nicht mehr zur Entropie bei. Die Temperatur der Neutrinos hat gemäss (d) von TL auf $T_\nu L'$ abgenommen, während sich die Temperatur der Photonen auf T_γ erhöht hat. Damit wird die Entropie zum Zeitpunkt, wenn das Universum eine Länge von L' besitzt,

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{45\hbar^3 c^3}\Big((T_\gamma L')^3 + \frac{7}{8}(1+1+1)(T_\nu L')^3\Big) \\ &= \frac{4\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{45\hbar^3 c^3}\Big((T_\gamma L')^3 + \frac{21}{8}(T_\nu L')^3\Big)\,. \end{aligned}$$

(f) *Mit Hilfe der Entropieerhaltung kann nun das Verhältnis zwischen der Temperatur* T_ν *der kosmischen Neutrino-Hintergrundstrahlung und derjenigen der Photonen* T_γ *bestimmt werden.*

Lösung: Die Entropieerhaltung ergibt nun

$$(T_\gamma L')^3 + \frac{21}{8}(T_\nu L')^3 = (1 + \frac{35}{8})(T_\nu L')^3$$

und damit

$$\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3 = \frac{11}{4}\,.$$

(g) *Bestimme schliesslich die heutige Temperatur der Neutrino-Hintergrundstrahlung* T_ν *aus dem Wert der Photonen-Hintergrundstrahlung* $T_\gamma = 2.7$ *K.*

Lösung: Mit dem Resultat aus (f) erhalten wir schliesslich

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma = 0.71 T_\gamma = 1.9\,\mathrm{K}\,.$$

R. Moser