

1. Grundzustand des idealen Fermigas.

- (a) Zeige, dass die mittlere Besetzungszahl $\langle n(\epsilon) \rangle$ eines Fermigas als Funktion der Energie ϵ für $T \rightarrow 0$ durch die Stufenfunktion $\Theta(\mu - \epsilon)$ gegeben ist.

Lösung: Die mittlere Besetzungszahl für Fermionen in Abhängigkeit der Temperatur T lautet:

$$\langle n(\epsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{k_B T}(\epsilon - \mu)} + 1}$$

Damit müssen für $T \rightarrow 0$ die folgenden beiden Fälle unterschieden werden:

$$\begin{aligned} 0 < (\epsilon - \mu) : \quad \lim_{T \rightarrow 0} \langle n(\epsilon) \rangle &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-\frac{1}{k_B T}(\mu - \epsilon)} + 1} = 1, \\ 0 > (\epsilon - \mu) : \quad \lim_{T \rightarrow 0} \langle n(\epsilon) \rangle &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{k_B T}(\epsilon - \mu)} + 1} = 0. \end{aligned}$$

Somit entspricht die mittlere Besetzungszahl eines Fermionengases für $T \rightarrow 0$ der Stufenfunktion $\Theta(\mu - \epsilon)$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \langle n(\epsilon) \rangle = \Theta(\mu - \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < (\epsilon - \mu) \\ 0 & \text{für } 0 > (\epsilon - \mu) \end{cases}$$

Der Wert der Energie für welche das Argument der Stufenfunktion verschwindet bezeichnet man als Fermienergie $\epsilon_F = \mu(T = 0)$ (oder auch Fermikante).

- (b) Die dem Fermiimpuls p_F entsprechende Wellenlänge λ_F ist von der Grössenordnung R , wobei R den mittleren Teilchenabstand bezeichne. Begründe diese Aussage.

Lösungen: Der mittlere Teilchenabstand ist $R = (V/N)^{1/3}$. Mit der de Broglie Formel finden wir $\lambda_F = h/p_F \propto (V/N)^{1/3}$ mit $p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar/v^{1/3}$.

- (c) Kommentiere und begründe die Aussage, dass in einem idealen Fermigas im Grenzfall verschwindender Temperatur $T \rightarrow 0$ alle Zustände mit einer Wellenlänge $\lambda > \lambda_F$ besetzt und alle Zustände mit $\lambda < \lambda_F$ unbesetzt sind.

Lösung: Da für das Fermigas jeder Zustand höchstens einfach belegt sein darf, sind im Grundzustand alle N niederenergetischsten Zustände besetzt. Diese besitzen wegen $\epsilon \propto p^2/2m$ auch die kleinsten Impulse. In Wellenlängen ausgedrückt besitzen sie die höchsten Wellenlängen, da $p = h/\lambda$. Alle anderen

Zustände sind unbesetzt, da es sonst eine energetisch tiefere Belegung gäbe und es sich nicht um den Grundzustand handeln würde.

2. Schätze die Fermienergie ϵ_F für Kupfer mit $v = V/N = 12 \text{ \AA}^3$ ab. Berechne die zugehörige Fermitemperatur $T_F = \epsilon_F/k_B$. Was ist deren Bedeutung?

Lösung:

$$\epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e v^{2/3}} \approx 7 \text{ eV} \approx 8 \cdot 10^4 k_B \text{ K},$$

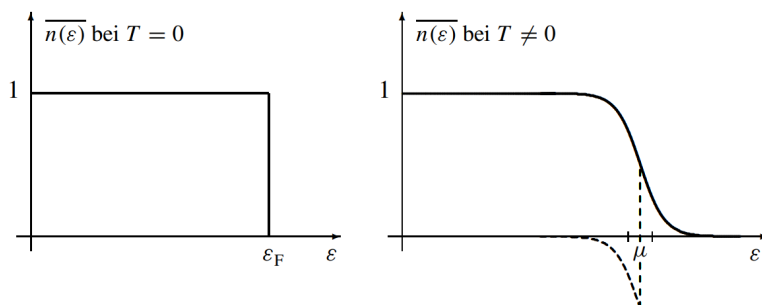
$$T_F = \epsilon_F/k_B \approx 8 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

Die Fermitemperatur stellt eine Vergleichsgrösse für endliche Temperaturen $T \neq 0$ dar. Unterhalb der Fermitemperatur dominieren die Effekte der Fermistatistik über thermische Effekte. Dies verdeutlicht sich in der mittleren Besetzungszahl der Zustände eines Fermigas im Bereich $0 < T \ll T_F$. Steigt die Temperatur eines Fermigas, so können zunehmend einzelne Fermionen die Fermikante ϵ_F überschreiten. Die Funktion der Besetzungszahlen des Fermigas entspricht dann nicht mehr exakt der Stufenfunktion, allerdings behält sie, bis auf die aufgeweichte Fermikante, weitgehend ihre Form.

3. Skizziere die mittlere Besetzungszahl $\langle n(\epsilon) \rangle$ und berechne deren Werte für

- (a) $\epsilon = \mu$,
- (b) $\epsilon = \mu \pm k_B T$,
- (c) $\epsilon = \mu \pm 3k_B T$.

Lösung: Die Funktion der Besetzungszahlen ist hier skizziert: (Quelle: Fliessbach, Statistische Physik).



Mit $\langle n(\epsilon) \rangle = 1/(e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1)$ für die mittlere Besetzungszahl erhält man

$$n(\epsilon) = \begin{cases} 0.50 & \epsilon = \mu \\ 0.50 \pm 0.23 & \epsilon = \mu \mp k_B T \\ 0.50 \pm 0.45 & \epsilon = \mu \mp 3k_B T \end{cases}$$

4. Berechne die Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ für ein Gas aus freien Fermionen mit Dispersionsrelation $\epsilon(p) = A \cdot p^\alpha$.

Lösung: Wie gewohnt ersetzen wir die Summe über die diskreten Impulse im kubischen Volumen durch ein Integral. Für ein Fermigas erhalten wir

$$\sum_{s_z, \vec{k}} \dots \cong \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \dots = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \dots = \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \dots$$

Die Zustandsdichte $\rho(\epsilon)$ kommt zustande, wenn wir nun das Integral über den Impulsbetrag in ein Integral über die Energiewerte umschreiben. Wir verwenden, dass

$$\epsilon = Ap^\alpha, \quad p = \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{1/\alpha}, \quad dp = A^{-1/\alpha} \epsilon^{1/\alpha-1} d\epsilon.$$

Für $\alpha > 0$ bleiben die Integrationsgrenzen gleich. Nun berechnen wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \dots &= \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\epsilon A^{-1/\alpha} \epsilon^{1/\alpha-1} \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{2/\alpha} \dots \\ &= \int_0^\infty d\epsilon \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \frac{\epsilon^{\frac{3}{\alpha}-1}}{A^{3/\alpha}} \dots \end{aligned}$$

Die Zustandsdichte ist definiert durch die Gleichung

$$1 = \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) \langle n(\epsilon) \rangle,$$

i.e. $\rho(\epsilon)$ gibt die Anzahl Einteilchenzustände pro Energieintervall an. Mit der Identität

$$N = \sum_{s_z, \vec{k}} \langle n(\epsilon) \rangle \cong \frac{V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \langle n(\epsilon) \rangle$$

finden wir, dass

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \frac{V}{N} \frac{\epsilon^{\frac{3}{\alpha}-1}}{A^{3/\alpha}} = \text{const.} \cdot \frac{V}{N} \epsilon^{\frac{3}{\alpha}-1}.$$