Statistische Thermodynamik II — Serie 11

Molekularfeldnäherung, Landau-Theorie — Lösungen

1. *Berechne den magnetischen kritischen Exponenten β, welcher das Temperatur-Verhalten der Magnetisierung m in der Umgebung des kritischen Punktes beschreibt,*

$$m(T) \propto (T_c - T)^\beta \,,$$

für das d-dimensionale Ising-Modell in der Molekularfeldnäherung. Entwickle dazu die Selbstkonsistenzgleichung

$$m = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \cdot m\right)$$

in der Nähe der kritischen Temperatur um $m = 0$.

Lösung: Wir setzen

$$T = T_c(1+t)\,,$$

für Temperaturen T nahe der kritischen Temperatur T_c, d.h. kleine t. Beachte, dass t dimensionslos ist und dass gilt

$$m(T) \propto (T_c - T)^\beta = T_c^\beta (-t)^\beta \,, \quad \Rightarrow \quad m(T) \propto (-t)^\beta \,.$$

Wir entwickeln nun die Selbstkonsistenzgleichung:

$$\begin{aligned} m = \tanh\big(m\frac{T_c}{T}\big) = \tanh\big(\frac{m}{1+t}\big) &= \frac{m}{1+t} - \frac{1}{3}\frac{m^3}{(1+t)^3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^5}{(1+t)^5}\right) \\ &= m - mt - \frac{m^3}{3} + \text{höhere Terme}\,. \end{aligned}$$

Dies wiederum bedeutet, dass

$$t = -\frac{m^2}{3} + \text{höhere Terme}\,, \quad \Leftrightarrow \quad m \propto (-t)^{\frac{1}{2}} + \text{höhere Terme}\,.$$

Das Ergebnis für den kritischen Exponenten β in der Molekularfeldnäherung ist somit

$$\beta = 1/2\,.$$

2. *Die kritische Temperatur eines Phasenübergangs ist in der Landau-Theorie durch die Bedingung $b(T_c) = 0$ gegeben. Berechne das Verhalten der Magnetisierung in der Umgebung von T_c indem du den Koeffizienten $b(T)$ um $T = T_c$ entwickelst und bestimme daraus den entsprechenden kritischen Exponenten.*

Lösung: Gemäss der Landau-Theorie lässt sich die freie Energiedichte als eine Entwicklung in der Magnetisierung m um $m = 0$ schreiben,

$$f(T, m) = a(T) + \frac{1}{2}b(T)m^2 + \frac{1}{4}c(T)m^4 + \dots ,$$

wobei $c(T) > 0$ angenommen wird und die Symmetrie $m \leftrightarrow -m$ dadurch berücksichtigt wird, dass $f(T, -m) = f(T, m)$. Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

1) $b(T) > 0$: $f(m)$ ist minimal bei $m = 0$, es gibt keine Symmetriebrechung,
2) $b(T) < 0$: es gibt zwei entartete Minima bei $m_0 = \pm\sqrt{-b(T)/c(T)}$ (sowie ein lokales Maximum bei $m = 0$), die Symmetrie $m \leftrightarrow -m$ ist durch die Wahl eines der beiden Minima spontan gebrochen.

Die kritische Temperatur ist also durch $b(T_c) = 0$ definiert und kann unter der Annahme, dass $b(T)$ in der Umgebung von T_c analytisch ist um T_c entwickelt werden,

$$b(T) = b_0(T - T_c) + \mathcal{O}\left((T - T_c)^2\right) .$$

Die Annahme, dass die symmetrische Phase für Temperaturen $T > T_c$ realisiert ist, liefert $b_0 > 0$. Damit liegt also das Minimum von $f(m, T)$ bei

$$m = \begin{cases} 0, & T > T_c, \\ \pm\sqrt{\frac{b_0}{c}(T_c - T)^{1/2}}, & T < T_c, \end{cases}$$

und wir erhalten für den kritischen Exponenten $\beta = \frac{1}{2}$.