

Dimension des Modells unabhängig sind. Dies ist zum Beispiel für das Ising-Modell, das X-Y-Modell und das Heisenberg-Modell der Fall. Unterhalb der oberen kritischen Dimension trifft dies jedoch nicht mehr zu.

Die Molekularfeldnäherung, welche ja auf dem Mittelwert über die Spins des Systems basiert, verbessert sich mit zunehmender Anzahl nächster Nachbarn und zunehmender Reichweite der Wechselwirkung. Wenn sowohl $z \rightarrow \infty$, als auch die Reichweite der Wechselwirkung gegen unendlich gehen, wird die Molekularfeldnäherung exakt. Dies wird durch Tabelle 2.5 illustriert, wo einige Werte von T_c/T_c^{mf} für unterschiedliches z für den Fall des Spin 1/2 Ising-Modells gesammelt sind.

Tabelle 2.5: Verbesserung von T_c/T_c^{mf} für steigendes z beim Spin 1/2 Ising-Modell

z	T_c/T_c^{mf}
4	1.76
6	1.33
12	1.23

Neben den erwähnten Schwächen der Molekularfeldnäherung sollten wir uns jedoch auch ihrer Vorteile bewusst sein. So erhält man für dreidimensionale Modelle im allgemeinen richtige qualitative Vorausagen für das Phasendiagramm. Sie stellt zudem einen brauchbaren und ausführbaren Zugang zum Studium komplizierter Modelle dar. Während numerische Methoden mit steigender Dimensionalität schwieriger anzuwenden sind, verbessert sich die Molekularfeldnäherung in diesem Fall. Schliesslich zeigt sie die wichtige Rolle des Ordnungsparameters für das Verständnis von Phasenübergängen auf.

2.8 Einführung in die Renormierungstheorie

Im Verlauf dieser Vorlesung haben wir ein gutes phänomenologisches Verständnis der Phasenübergänge gewonnen. Es bleiben allerdings noch verschiedene offene Fragen. So wissen wir zum Beispiel noch nicht, warum kontinuierliche Phasenübergänge Universalitätsklassen bilden, warum die kritischen Exponenten einer Universalitätsklasse oberhalb der oberen kritischen Dimension die Molekularfeld-Werte annehmen, oder warum die Exponenten den gleichen Wert haben für den Limes $T \rightarrow T_c^\pm$. Wir haben zudem beobachtet, dass die hergeleiteten Ungleichungen für die kritischen Exponenten tatsächlich mit Gleichheit erfüllt werden. Es fehlt uns nach wie vor eine gute Theorie für die Physik am kritischen Punkt.

Bei kritischen Phänomenen verhält sich eine sehr grosse Anzahl Freiheitsgrade kooperativ. Wie sich herausstellt, ist es dieses *kooperative Verhalten*, welches zusammen mit der Art der Freiheitsgrade das

Verhalten des Systems bestimmt, und nicht die genaue Art der Wechselwirkung. Diese Tatsache liegt der Universalität dieser Phänomene zugrunde.

1966 erfand Leo Kadanoff eine einfache Methode, mit welcher man Systeme nahe am kritischen Punkt beschreiben kann, ohne jedoch die Zustandssumme berechnen zu müssen. In 1974 wurde diese Technik von Wilson und Kogut in einem bahnbrechenden Papier quantitativ formalisiert, dies ist die sogenannte **Renormierungsgruppenmethode**, eine der wichtigsten Einsichten der modernen theoretischen Physik. Bei der Renormierung wird die Längenskala eines Systems verändert, wobei das System Freiheitsgrade verliert (engl. *coarse graining*). Hier lösen wir uns vom traditionellen Ansatz der statistischen Physik, bei welchem (im Rahmen der Berechnung der Zustandssumme) alle mikroskopischen Freiheitsgrade des Systems aufs Mal behandelt werden. Am kritischen Punkt bleiben die Eigenschaften des Systems unverändert unter der Renormierung, er stellt einen *Fixpunkt* der Renormierungsgruppentransformation dar. Dies führt dazu, dass die thermodynamischen Funktionen durch sogenannte *Skalengesetze* beschrieben werden können, was direkt die Gleichheit der kritischen Exponenten ober- und unterhalb von T_c impliziert.

Es gibt zwei Kategorien von Renormierungstechniken. Einerseits die feldtheoretischen Methoden, welche in der Teilchenphysik zum Einsatz kommen und im Fourierraum stattfinden, und andererseits diejenigen, welche direkt das Gitter renormieren (real space). Kadanoffs Blockspin-Methode bietet den einfachsten Zugang zur Renormierungsgruppentheorie und gehört zur letzteren Kategorie.

2.8.1 Kadanoffs Blockspin-Methode

In der Blockspin-Renormierung teilt man Gitterpunkte eines Gitters in Gruppen oder **Blöcke** ein, und ersetzt dann jeden dieser Blöcke durch einen neuen Gitterpunkt. Wenn das betrachtete Gitter **diskrete Skalierungsinvarianz** besitzt, so ist das neue, block-renormierte Gitter genau gleich wie das ursprüngliche Gitter, hat aber einen neuen (grösseren) Gitterabstand $a \rightarrow a' = ba$. Der Renormierungsprozess wird abgeschlossen, indem man alle Dimensionen des neuen Gitters um den Faktor b reduziert, so dass wir zuletzt wieder das ursprüngliche Gitter erhalten. Wenn wir jedoch im Durchschnitt p Gitterpunkte zu einem Block zusammenfassen, so enthält das renormierte Gitter weniger Gitterpunkte als das ursprüngliche: wir haben das Gitter um den Faktor b skaliert, sein Volumen verkleinert sich dadurch um den Faktor b^d , wobei d wieder die räumliche Dimension des Gitters ist. Wenn die Gitterpunkte im renormierten Gitter genau gleich wie im



Abbildung 2.31: Leo Kadanoff (1937 - 2015), amerikanischer theoretischer Physiker

ursprünglichen Gitter angeordnet sind, so enthält das renormierte Gitter einen Faktor $p = b^d$ weniger Punkte.

In Abbildung 2.32 ist das am häufigsten angewendete Verfahren zur Blockrenormierung des quadratischen Gitters dargestellt. Hier ist $b = 2$ und das renormierte Gitter enthält einen Viertel der ursprünglichen Anzahl Gitterpunkte. In Abbildung 2.33 ist eine alternative Methode zur Renormierung des quadratischen Gitters dargestellt, hier ist $b = \sqrt{2}$ und die Anzahl Gitterpunkte wird halbiert. Abbildung 2.34 zeigt die Renormierung des triangulären Gitters mit $b = \sqrt{3}$ und einem Drittel der ursprünglichen Gitterpunkte.

Abbildung 2.32: Blockrenormierung des quadratischen Gitters mit $b = 2$. Reproduziert aus [Bin+92].

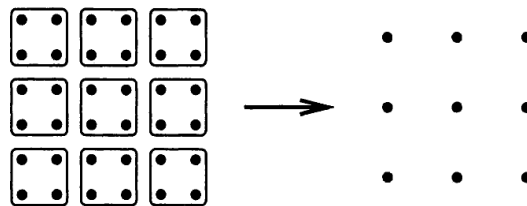


Abbildung 2.33: Blockrenormierung des quadratischen Gitters mit $b = \sqrt{2}$. Reproduziert aus [Bin+92].

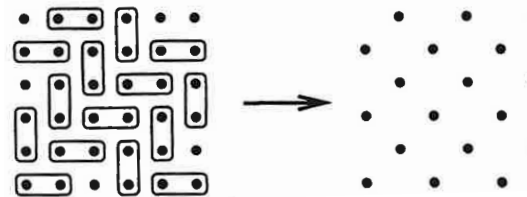
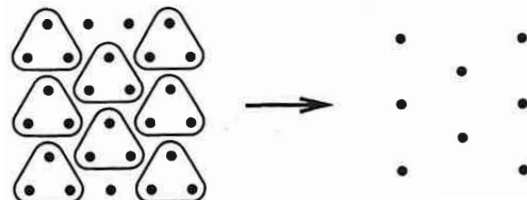


Abbildung 2.34: Blockrenormierung des triangulären Gitters mit $b = \sqrt{3}$. Reproduziert aus [Bin+92].



Wir betrachten ein Gittermodell mit einer skalaren Spinvariable s_i auf jedem Gitterpunkt i . Wir renormieren nun dieses Gitter. Für jeden Block k definieren wir neue Variablen $\sigma_k^{(1)}$, welche eine Funktion f der Spins im Block k sind. $\sigma_k^{(1)}$ sind sogenannte **Blockvariable**. Die Blockvariable repräsentiert unseren neuen, effektiven Freiheitsgrad. Die Menge der Gitterpunkte im Block k bezeichnen wir mit S_k . Somit ist

$$\sigma_k^{(1)} = f(\{s_i\}), \quad i \in S_k. \tag{2.138}$$

Wir ersetzen nun jeden Block durch einen einzigen Gitterpunkt

mit der Variable $\sigma_k^{(1)}$ und skalieren das Gitter auf die Grösse des ursprünglichen Gitters.

In der Blockspin-Renormierung wird diese Transformation des Gitters nun wiederholt angewendet. Wir bezeichnen die Blockvariablen nach n Renormierungen des Gitters mit $\sigma_k^{(n)}$, und analog ist

$$\sigma_k^{(n+1)} = f(\{\sigma_i^{(n)}\}), \quad i \in S_k. \quad (2.139)$$

Diese rekursive Definition, bei welcher die Variablen im $n + 1$ -ten Schritt nur vom n -ten Schritt abhängen ist essenziell für den Renormierungsprozess. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Blockvariablen zu definieren. Für das Ising-Modell zum Beispiel stellt es sich als günstig heraus, für die Blockvariable den Wert zu wählen, welchen die Mehrheit der Spins im relevanten Block annehmen,

$$\sigma_k^{(1)} = \text{sign} \left(\sum_{i \in S_k} S_i \right), \quad (2.140)$$

wobei der Block so gewählt werden muss, dass er eine ungerade Anzahl Spins enthält. Diese Regel wird als **Mehrheitsprinzip** bezeichnet. Es muss bei der Wahl der Definition jedoch sichergestellt werden, dass die neuen Variablen die gleiche Wertemenge annehmen können wie die alten Variablen.

Kadanoff nahm an, dass sich die Kopplungskonstanten der Hamiltonfunktion des Systems unter der Renormierung des Gitters verändern, nicht aber ihre Form. Den ersten Punkt kann man nachvollziehen, indem man die Korrelationslänge ξ' im renormierten System betrachtet: gemessen im renormierten Gitterabstand ba ist

$$\xi' = \frac{\xi}{b} < \xi, \quad (2.141)$$

d.h. das System hat sich durch die Blockspintransformation vom kritischen Punkt entfernt, was mit einer Veränderung der Kopplungskonstanten einhergeht. Die zweite Annahme stellt sich aber als falsch heraus. Dies kann man sich durch die folgende Betrachtung klar machen. Beginnen wir mit einem System, bei welchem nicht die nächsten Nachbarn, sondern nur die übernächsten Nachbarn miteinander wechselwirken.

Die Annahme, dass auch die aus dem Renormierungsschritt hervorgehenden Blockspins nur mit ihren übernächsten Nachbarn wechselwirken, ist jedoch absolut unhaltbar. Wir sehen, dass sich die Form der Hamiltonfunktion selbst bei der Renormierung verändern kann. Umgekehrt können wir uns auch das Auftreten von next-to-nearest-neighbor Kopplungen unter Renormierung klarmachen, indem wir die Summe über die benachbarten Ecksps in Abb. 2.36

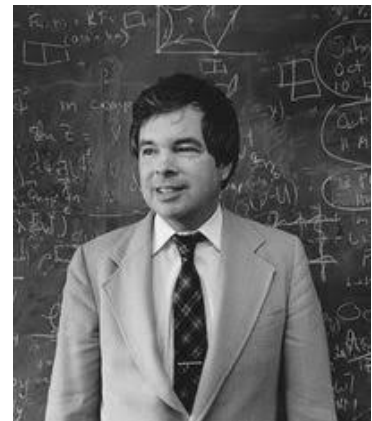
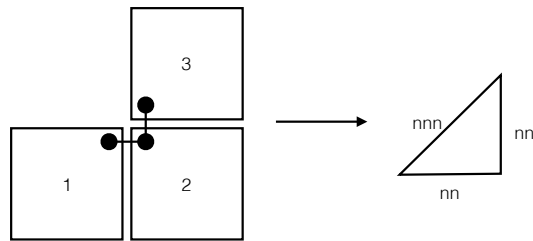


Abbildung 2.35: Kenneth Wilson (1936 - 2013), amerikanischer theoretischer Physiker, Nobelpreis 1982

Abbildung 2.36: Erscheinen von nnn-Kopplungen bei der Blockspinrenormierung im zweidimensionalen Isingmodell.



betrachten. Diese koppelt Spins in den Blocks 1 und 3 und führt zu einer effektiven Kopplung zwischen den Blockspins 1' und 3'.

Ebenso ist es plausibel, dass verschiedene ursprüngliche Hamiltonfunktionen nach mehrfacher Renormierung zu identischen Blockspinhamiltonfunktionen führen können. Dies wurde von Wilson in seiner allgemeinen Theorie der Renormierungsgruppentransformation formalisiert.

2.8.2 Die Renormierungsgruppentransformation

Wir können nun allgemein eine **Renormierungsgruppentransformation** definieren. Wir werden sehen, dass der Fixpunkt dieser Abbildung das System am kritischen Punkt beschreibt. Wir beschreiben das Ausgangsmodell durch eine **reduzierte** Hamiltonfunktion $\bar{H} = H/k_B T$. Das renormierte System wird durch eine neue reduzierte Hamiltonfunktion beschrieben, die **effektive Hamiltonfunktion**.

$$\bar{H}' = \mathbf{R}[\bar{H}]. \tag{2.142}$$

Der Renormierungsgruppenoperator \mathbf{R} verringert die Anzahl Freiheitsgrade des Systems von N zu N' und ist im allgemeinen eine komplizierte, nichtlineare Transformation.⁵ Dies kann beispielsweise mittels einer Blockspin-Renormierung geschehen, oder im feldtheoretischen Kontext, den wir hier nicht besprechen. Der Skalierungsfaktor b ist allgemein durch

$$b^d = N/N' \tag{2.143}$$

definiert.

Betrachten wir als Beispiel Ising-Spins S_i auf einem quadratischen Gitter. Unsere Ausgangshamiltonfunktion \bar{H}_N hat die Form

$$\bar{H}_N = NK_0 + \tilde{B} \sum_i S_i + K_1 \sum_{ij} S_i S_j + K_2 \sum_{ijk} S_i S_j S_k + \dots, \tag{2.144}$$

wobei alle Multinome in den S_i enthalten sind, welche mit der Symmetrie des Systems kompatibel sind. Die renormierte Hamiltonfunktion $\bar{H}'_{N'}$ hat dieselbe Form, aber renormierte Kopplungskonstanten K'_k :

⁵ Die Bezeichnung *Renormierungsgruppe* hat historische Wurzeln. Tatsächlich bilden die Transformationen \mathbf{R}_b eine *Halbgruppe*, da \mathbf{R}_b kein Inverses hat, aber $\mathbf{R}_{b_1 b_2}[\bar{H}] = \mathbf{R}_{b_1} \cdot \mathbf{R}_{b_2}[\bar{H}]$.

$$\bar{H}'_{N'} = N'K'_0 + \bar{B}' \sum_i \sigma_i^{(1)} + K'_1 \sum_{ij} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} + K'_2 \sum_{ijk} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} \sigma_k^{(1)} + \dots \quad (2.145)$$

Waren gewisse Kopplungskonstanten K_k in der Ausgangshamiltonfunktion gleich null, so sind nun insbesondere die entsprechenden K'_k im allgemeinen ungleich null!

Eine zulässige Renormierungsgruppentransformation muss die Bedingung erfüllen, dass die Zustandssumme unter der Transformation unverändert bleibt:

$$Z_{N'}(\bar{H}') = Z_N(\bar{H}). \quad (2.146)$$

Die freie Energie bleibt daher auch gleich. Sie ist jedoch eine extensive Grösse. Die reduzierte freie Energie pro Spin, $\bar{f} = f/k_B T$, transformiert wie folgt:

$$\bar{f}(\bar{H}') = b^d \bar{f}(\bar{H}). \quad (2.147)$$

Wir haben bereits angesprochen, dass sich die Längenskalen im Gitter um den Faktor b reduzieren:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = b^{-1} \vec{r}. \quad (2.148)$$

Impulse, welche die Dimension einer inversen Länge haben, transformieren als

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}' = b \vec{p}. \quad (2.149)$$

Die qualitativen Merkmale des kooperativen Verhaltens in einem System resultieren aus der iterativen Natur der Renormierungsgruppe. Es ist unser Ziel, die Fixpunkte \bar{H}^* der Renormierungsgruppentransformation \mathbf{R} (Eq. (2.142)) zu finden,

$$\mathbf{R}[\bar{H}^*] = \bar{H}^*. \quad (2.150)$$

Der Fixpunkt einer Transformation \mathbf{R} ist eine Eigenschaft der Transformation selbst. Die Fixpunkthamiltonfunktion \bar{H}^* wird durch Lösung der Fixpunktgleichung (2.150) bestimmt, in welcher die ursprüngliche Hamiltonfunktion nicht vorkommt. Am Fixpunkt ist das System invariant unter Skalentransformationen, eine Eigenschaft, welche das Verhalten am kritischen Punkt charakterisiert. In diesem Zusammenhang betrachten wir das Verhalten der Korrelationslänge. Am Fixpunkt muss sie auf sich selbst abgebildet werden,

$$\xi' = \xi \equiv \xi^*. \quad (2.151)$$

Aufgrund von Gl. (2.148) transformiert ξ jedoch wie

$$\xi' = b^{-1} \xi. \quad (2.152)$$

Dies kann nur dann mit Gl. (2.151) konsistent sein, wenn ξ unendlich ist, was das erwartete Verhalten am kritischen Punkt ist, oder trivial gleich null.

2.8.3 Renormierungsgruppenflüsse, Fixpunkte und Universalität

Wir haben zuvor das Konzept der effektiven Hamiltonfunktion eingeführt, welche jeweils von einer Anzahl Parametern oder Kopplungskonstanten K_1, K_2, \dots abhängt:

$$H'[\{s\}, \{K_n\}] = \sum_n K_n \mathcal{O}_n[s]. \quad (2.153)$$

Wir können uns nun den Raum der Hamiltonfunktionen vorstellen, in welchem ein Punkt mit Ortsvektor \vec{K} eine effektive Hamiltonfunktion mit den dazugehörigen Parametern repräsentiert. Die Parameter K_n sind die Koordinaten in diesem Raum. Das Ising-Modell ohne externes Feld hat zunächst nur die Grösse $K_1 = \beta J$ als freien Parameter. Mit externem Feld ist der Parameterraum zweidimensional mit Koordinaten βJ und $\tilde{B} = \beta B$.

Während Kadanoff fälschlicherweise annahm, dass die *Form* der Hamiltonfunktion unter der Renormierung unverändert bleibt, erkannte Wilson, dass die effektive Hamiltonfunktion im Laufe der Renormierung eine unendliche Anzahl von Kopplungen K_n erhält, welche *mit der Symmetrie des Systems konsistent* sind, selbst wenn die ursprüngliche Hamiltonfunktion nur wenige Terme enthielt. Für das Beispiel des Ising-Modells bedeutet dies (wie wir bereits gesehen haben), dass selbst wenn wir nur mit der nächste-Nachbarn-Wechselwirkung (Kopplungskonstante βJ) angefangen haben, die effektive Hamiltonfunktion auch Wechselwirkungen mit zweiten und weiter entfernten Nachbarn enthält, sowie Wechselwirkungen zwischen mehr als zwei Spins. Das heisst, dass selbst Kopplungskonstanten K_n , die ursprünglich gleich Null waren nach einigen Renormierungsschritten ungleich Null sein können.

Die Renormierungsgruppentransformation \mathbf{R} lässt uns in diskreten Schritten im Parameterraum herumspringen. Bei jeder Iteration werden die Werte der Parameter, welche in der effektiven Hamiltonfunktion erscheinen durch neue ersetzt, und unser System legt eine bestimmte Bahn im Parameterraum zurück. Man spricht hier vom **Fluss** unter der Renormierungsgruppe (auf Englisch *renormalization group flow* oder kurz *RG flow*).

Wie bereits erwähnt hat die Renormierungsgruppe Fixpunkte, bei denen das System unter einer Transformation \mathbf{R} unverändert bleibt. Fixpunkte können als **attraktiv** (oder anziehend), **repulsiv** (abstossend) und **gemischt** klassifiziert werden. *Alle* Hamiltonfunktionen in der Umgebung eines attraktiven Fixpunktes streben diesen Fixpunkt unter Renormierungsgruppentransformationen an. Im Falle des repulsiven Fixpunktes strebt *keine* der Hamiltonfunktionen in der Umgebung des Fixpunktes diesen Fixpunkt an. Ein gemischter Fixpunkt wird von Hamiltonfunktionen in gewissen Richtungen

angestrebt, in anderen jedoch nicht. Abbildung 2.37 zeigt einen Fluss

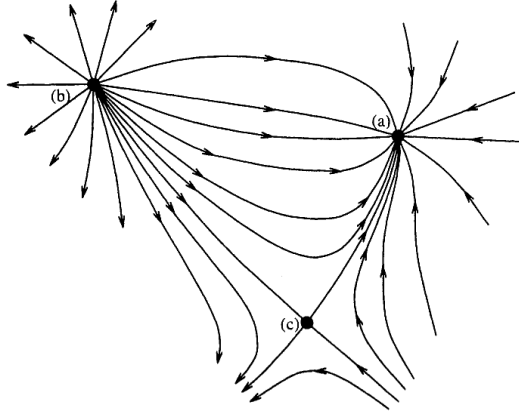


Abbildung 2.37: Fixpunkte unter dem Renormierungsgruppenfluss im Parameterraum. (a) Anziehender Fixpunkt. (b) Abstoßender Fixpunkt. (c) Gemischter Fixpunkt. Reproduziert aus [Bin+92].

im Parameterraum mit den drei Klassen von Fixpunkten.

Zur Illustration dieser Konzepte betrachten wir im folgenden ein Beispiel der Blockspinrenormierung im zweidimensionalen Ising-Modell auf dem quadratischen Gitter (siehe Abbildungen 2.38, 2.39 und 2.40). Schwarze Quadrate stehen für Spin 1 und weiße für Spin -1 . In einer Transformation werden jeweils Gruppen von 3×3 Spins zu einem Block zusammengefasst, die neue Blockvariable erhält ihren Wert nach dem Mehrheitsprinzip. Die Systemgröße wird bei dieser Transformation um den Faktor 3 reduziert.

Beginnen wir mit einer Ausgangstemperatur *oberhalb* der kritischen Temperatur (siehe Abbildung 2.38), so zerstört die Skalentransformation die kurzreichweitige Ordnung der Ausgangskonfiguration. Die Spins sind nach wenigen Schritten komplett unkorreliert. Dies ist der Fall in einem System bei $T = \infty$. Das System fließt unter der Renormierungsgruppentransformation somit von T_c weg zu $T = \infty$. Dies gilt für alle Temperaturen $T > T_c$, benötigt aber mehr Renormierungsschritte, je näher bei T_c der Prozess begonnen wird.

Beginnen wir hingegen mit einer Ausgangstemperatur *unterhalb* der kritischen Temperatur (siehe Abbildung 2.39), so fließt das System unter der Renormierung zum komplett geordneten Zustand, was $T = 0$ entspricht. Die Fluktuationen finden relativ zum geordneten Grundzustand statt und werden unter der Renormierung unterdrückt.

Bei $T = T_c$ hingegen (siehe Abbildung 2.40) bleibt das System invariant unter der Renormierungsgruppentransformation, in dem Sinne, dass die verschiedenen Spinkonfigurationen statistisch gesehen gleich sind. Am kritischen Punkt gibt es Fluktuationen in allen Längenskalen, dies ist auch nach mehreren Renormierungsschritten

Abbildung 2.38: Blockspinrenormierung im $2d$ Ising-Modell bei $T = 1.22T_c$. Schwarze Quadrate stellen Spin $+1$ dar, weiße Spin -1 . Die Spins sind nach jedem Renormierungsschritt weniger korreliert. Reproduziert aus Kenneth G. Wilson, *Scientific American* 241, 158 - 179 (1979).



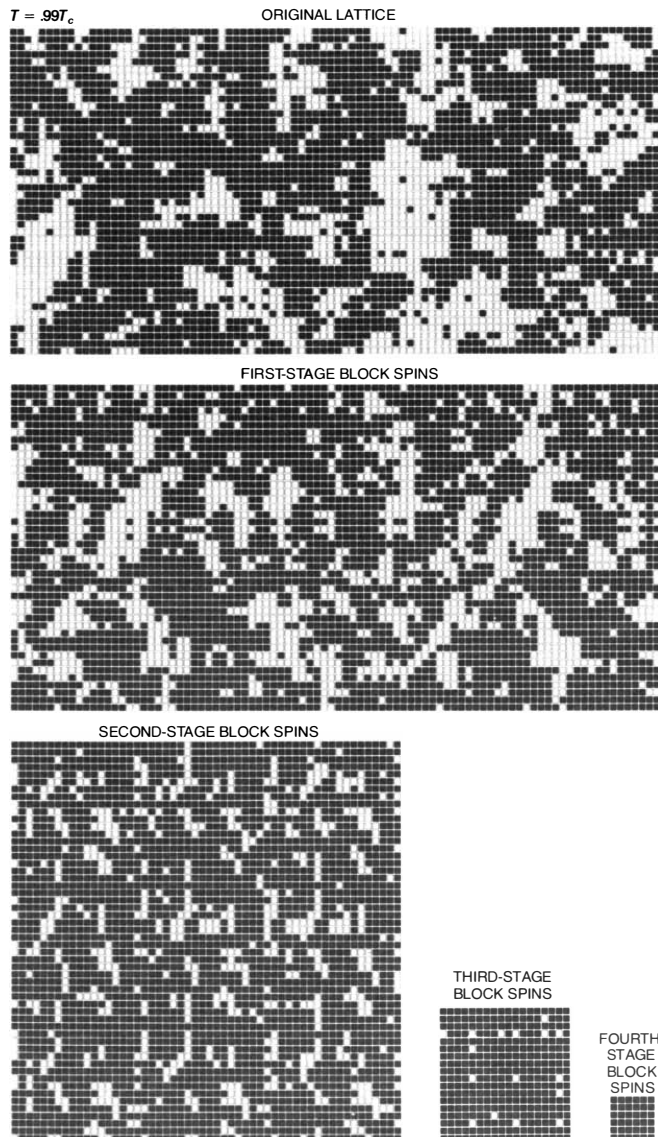


Abbildung 2.39: Blockspinrenormierung bei $T = 0.99T_c$. Die Abweichung vom geordneten Zustand wird in jedem Renormierungsschritt geringer. Reproduziert aus Kenneth G. Wilson, *Scientific American* 241, 158 - 179 (1979).

stets der Fall.

Wir sehen anhand dieses Beispiels, dass nicht nur $T = T_c$ sondern auch $T = \infty$ und $T = 0$ Fixpunkte der Renormierungsgruppentransformation sind. $T = \infty$ ist der **Hochtemperaturfixpunkt** und $T = 0$ der **Tiefemperaturfixpunkt**. Beides sind anziehende Fixpunkte, zu welchen das System unter der Renormierungsgruppentransformation hinfließt. Der **kritische** Fixpunkt $T = T_c$ hingegen erweist sich als gemischter Fixpunkt. Er ist anziehend auf einer sogenannten **kritischen Fläche** (oder kritischen Mannigfaltigkeit) im Parameterraum, aber abstossend orthogonal dazu.

Das letzte wichtige Konzept, welches wir benötigen um die volle Stärke der Renormierungsgruppenmethode zu ersehen, ist das Konzept der relevanten, irrelevanten und marginalen Observablen bezüglich eines Fixpunktes.

Falls die Kopplung K_n einer Observablen in der Nähe eines bestimmten Fixpunktes beim Übergang zu grösseren Skalen im Rahmen einer Renormierungsgruppentransformation stets zunimmt, so ist sie eine **relevante** Observable. Nimmt die Kopplung beim Übergang zu grösseren Skalen stets ab, so handelt es sich um eine **irrelevante** Observable. Falls keiner der obigen Fälle zutrifft, spricht man von einer **marginalen** Observable. Die Richtungen, welche die kritische Fläche aufspannen entsprechen den irrelevanten Observablen. Die Richtungen ausserhalb der kritischen Fläche entsprechen relevanten Observablen. Die **Kodimension** der kritischen Fläche (Anzahl Dimensionen des gesamten Parameterraums minus Anzahl Dimensionen der kritischen Fläche) entspricht der Anzahl relevanter Operatoren. Marginale Observable ergeben logarithmische Korrekturen zum Skalierungsverhalten.

Für das *makroskopische* Verhalten sind nur relevante Operatoren wichtig. In der Praxis stellt sich heraus, dass in typischen Systemen nach hinreichend vielen Renormierungsschritten nur sehr wenige Operatoren übrig bleiben, da nur sie relevant sind. Dies erklärt schlussendlich auch, weshalb es im Rahmen der Thermodynamik ausreicht, ein System, welches mikroskopisch aus $\sim 10^{23}$ Teilchen besteht (und durch ebensoviele Operatoren beschrieben wird) mit nur einer Handvoll thermodynamischer Variablen zu beschreiben. Die Robustheit und allgemeine Anwendbarkeit der Thermodynamik ist also mittels Renormierungsgruppentheorie erklärbar!

Das Verhalten der verschiedenen Observablentypen unter Renormierung erklärt auch die erstaunliche Ähnlichkeit der kritischen Exponenten in den verschiedensten Systemen mit kontinuierlichen Phasenübergängen: werden die Systeme durch die gleiche Anzahl und die gleichen Typen (bezüglich des Skalierungsverhaltens) relevanter Observabler beschrieben, gehören sie zur selben Univer-

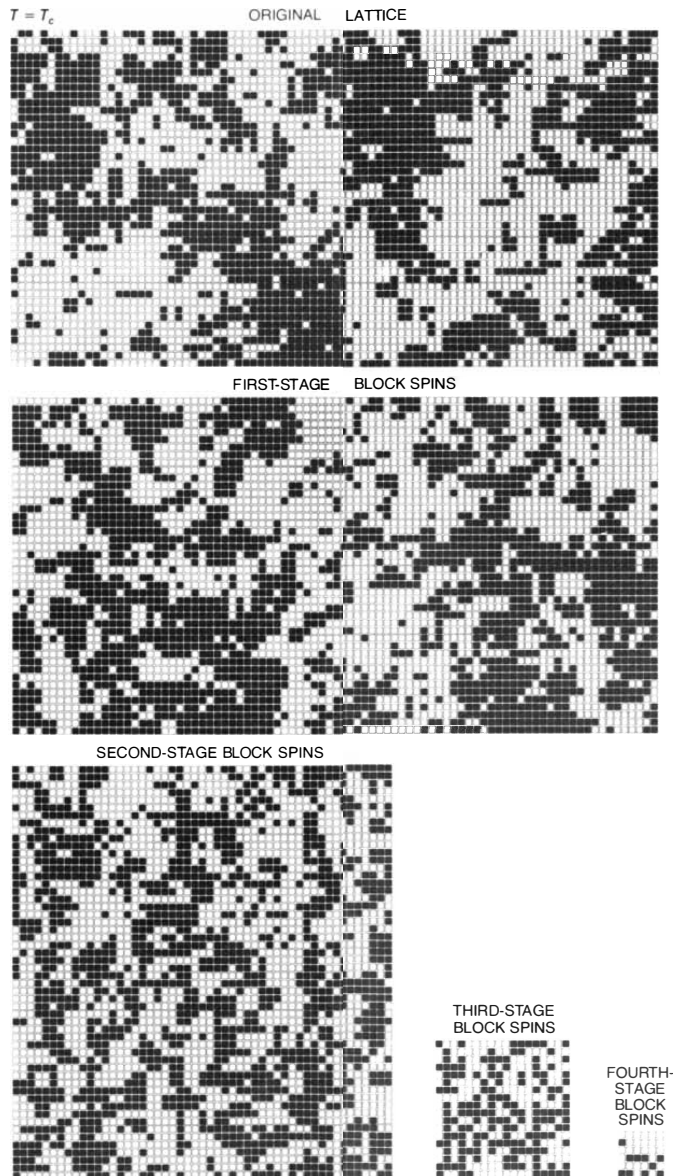
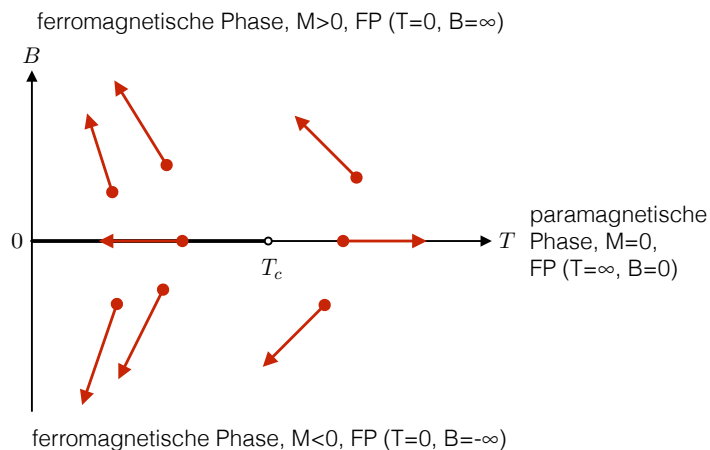


Abbildung 2.40: Blockspinrenormierung bei $T = T_c$. Das System sieht auf allen Längenskalen ähnlich aus, die Spinkonfigurationen sind statistisch äquivalent. Reproduziert aus Kenneth G. Wilson, *Scientific American* 241, 158 - 179 (1979).

salitätsklasse. Diese quantitative und qualitative Begründung der Unterteilung der verschiedenen Modelle in Universalitätsklassen ist einer der Haupterfolge der Renormierungsgruppentheorie.

Die *globalen* Eigenschaften des Renormierungsgruppenflusses bestimmen die Struktur des Phasendiagramms. Die Grundidee ist einfach: Wir beginnen an einem bestimmten Punkt im Raum der Kopplungskonstanten (d.h. im Phasendiagramm) und bestimmen den Fixpunkt, dem dieser Punkt unter wiederholten Renormierungsgruppentransformationen zustrebt. Alle Punkte im Parameterraum, also alle Modelle, welche demselben Fixpunkt zustreben gehören zur gleichen Universalitätsklasse. Der Systemzustand am Fixpunkt entspricht der Phase, in welcher sich der Ausgangspunkt befindet. Das kooperative Verhalten des Systems wird durch die verschiedenen Fixpunkte bestimmt, und im Anziehungsbecken (*Domäne*) des jeweiligen Fixpunktes gilt jeweils separat Universalität. Dies ist schematisch in Abbildung 2.41 für einen einfachen Ferromagneten dargestellt.

Abbildung 2.41: Phasendiagramm des Ferromagneten mit RG-Fluss von verschiedenen Ausgangspunkten



In Tabelle 2.6 sind die verschiedenen Typen von Fixpunkten unter dem Renormierungsgruppenfluss anhand ihrer Kodimension klassifiziert. Die Anzahl relevanter Richtungen kann als die Anzahl Parameter im System interpretiert werden, welche wir festlegen müssen, um das System in den Fixpunkt zu bringen.

Kodim.	Wert von ζ	Typ	Physikalische Domäne	Beispiel (Ferromagnet)	Anziehungsbecken
0	0	Sink	makroskopische Phase	$B = \pm\infty, T = 0$	$(B \geq 0, T)$
1	0	diskreter Fixpunkt	Koexistenzfläche (Phasengrenze)	$B = 0, T = 0$	$(B = 0, T < T_c)$
1	0	kontinuierlicher Fixpunkt	makroskopische Phase	paramag. Fixpkt, $B = 0, T = \infty$	$(B = 0, T > T_c)$
2	∞	kritischer Fixpunkt	kritische Fläche	kritischer Punkt $B = 0, T = T_c$	$(B = 0, T = T_c)$
2	0	Tripelpunkt	Tripelpunkt		
> 2	∞	multikritischer Punkt	multikritischer Punkt		
> 2	0	multipler Koexistenz-FP	multiple Koexistenz		

Tabelle 2.6: Klassifizierung der Fixpunkte anhand der Kodimension der kritischen Fläche

Quellennachweis

Dieser Teil folgt in groben Zügen [Ye092], mit zusätzlichem Material aus [Gol92] und [Bin+92]. Der erste Teil von [Car96] präsentiert das Material teils von einem anderen Blickwinkel und bildet eine gute komplementäre Lektüre.

Literatur

- [Ye092] J. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press, 1992. ISBN: 0-19-851730-0.
- [Gol92] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Frontiers in Physics. Oxford: Oxford University Press, 1992. ISBN: 0-201-55409-7.
- [Bin+92] J. Binney, N. Dowrick, A. Fisher und M. Newman. *The Theory of Critical Phenomena*. Westview Press, 1992. ISBN: 0-19-851393-3.
- [Car96] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN: 0-521-49959-3.